TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
KHOA TOÁN KINH TẾ
PGS. TS. NGUYỄN QUANG DONG - NGÔ VĂN THỨ - PGS. TS. HOÀNG ĐÌNH TUẤN

GIÁO TRÌNH

MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

NHÀ XUẤT BẢN
THỐNG KÊ

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
KINH TẾ QUỐC DÂN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
KHOA TOÁN KINH TẾ
PGS.TS. NGUYỄN QUAN DONG - NGÔ VĂN THỨ - PGS.TS. HOÀNG ĐÌNH TUẤN

GIÁO TRÌNH
MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

NHÀ XUẤT BẢN THỐNG KÊ
HÀ NỘI - 2006

LỜI NÓI ĐẦU

Sự tồn tại và vận động của các đối tượng, quá trình kinh tế - xã hội là hết sức phức tạp và đa dạng. Người ta có thể sử dụng nhiều phương pháp tiếp cận khác nhau để nghiên cứu, phân tích lý giải sự tồn tại và vận động này, từ đó tìm cách tác động đến các đối tượng và quá trình kinh tế nhằm mang lại lợi ích ngày càng lớn cho chính bản thân xã hội loài người. Mỗi cách tiếp cận trong những điều kiện cụ thể có những ưu, nhược điểm riêng. Phương pháp mô hình là một trong những phương pháp được xem là hiệu quả nhất trong nghiên cứu kinh tế - xã hội hiện nay. Phương pháp này kết hợp được nhiều ưu điểm của các cách tiếp cận hiện đại, đặc biệt là cách tiếp cận của lý thuyết hệ thống, nhờ vậy mà nó có thể kế thừa được thành quả của nhiều cách tiếp cận khác (các quan điểm kinh tế - xã hội, các tính qui luật của quá trình kinh tế - xã hội,...). Đây cũng là phương pháp khai thác được những công cụ mạnh của toán học, kỹ thuật tính toán. Nhờ đó mà phương pháp mô hình cho phép giải quyết các bài toán với kích cỡ hầu như không hạn chế với độ phức tạp mong muốn. Trong khuôn khổ môn học "Mô hình toán kinh tế" dành cho các chuyên ngành kinh tế và quản trị kinh doanh bậc đại học với thời lượng 60 tiết giảng, giáo trình này sẽ trang bị một số kỹ năng cơ bản về mô hình hoá toán kinh tế, ứng dụng phân tích và dự báo kinh tế. Giáo trình này được biên soạn dựa trên cơ sở chương trình và giáo trình "Mô hình toán kinh tế" đã được hội đồng thẩm định giáo trình Trường Đại học Kinh tế Quốc dân thông qua tháng 11/2001. Lần biên soạn này chúng tôi đã tham khảo và rút kinh

nghiệm 3 năm thực hiện giáo trình cùng tên của Nhà xuất bản Giáo dục năm 2002, tại các trường đại học trong cả nước. Một số nội dung được sửa chữa và bổ sung thuộc chương II, chương IV và phần bài tập cuối mỗi chương. Do hạn chế về thời lượng giảng dạy, giáo trình này không thể đề cập sâu và chi tiết, cũng như không đề cập đến nhiều nội dung khác thuộc lĩnh vực mô hình Toán kinh tế. Các nội dung này người đọc có thể tìm ở các tài liệu tham khảo chúng tôi đã liệt kê.

Cùng với giáo trình này, chúng tôi tổ chức biên soạn và lựa chọn một số phần mềm phù hợp cho lớp các bài toán tương ứng, do điều kiện xuất bản và bản quyền chúng tôi không cung cấp các phần mềm này kèm theo giáo trình. Người đọc có thể liên hệ với các tác giả hoặc qua trang Web www.neu.edu.vn (mục Khoa toán kinh tế) để nhận được trợ giúp.

Giáo trình gồm 5 chương:
Chương I, III do PGS.TS. Hoàng Đình Tuấn biên soạn
Chương II do PGS. TS. Nguyễn Quang Dong biên soạn
Chương IV, do GV. Ngô Văn Thứ biên soạn

GV. Ngô Văn Thứ chịu trách nhiệm sửa đổi và bổ sung trong lần xuất bản này.

Mặc dù giáo trình đã kế thừa nhiều tại liệu, cũng như đã được thử nghiệm trên nhiều đối tượng, ngành học, chúng tôi cho rằng giáo trình vẫn không thể tránh được những hạn chế nhất định. Chúng tôi mong nhận được sự quan tâm của các đồng nghiệp cũng như tất cả các bạn đọc, nhằm tạo điều kiện cho giáo trình ngày càng hoàn thiện hơn.

Hà nội - 2005
Các tác giả

Chương I

GIỚI THIỆU MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

I. Ý NGHĨA VÀ KHÁI NIỆM CỦA MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ TRONG NGHIÊN CỨU, PHÂN TÍCH KINH TẾ

1. Ý nghĩa của phương pháp mô hình

Đã từ lâu, khi con người muốn tìm hiểu, khám phá những hiện tượng trong tự nhiên, họ đã biết quan sát, theo dõi và ghi nhận các hiện tượng này. Kết quả theo dõi được đúc kết thành kinh nghiệm và được lưu truyền qua các thế hệ. Đó là *phương pháp trực tiếp quan sát* trong nghiên cứu. Đối với các sự vật, hiện tượng phức tạp hơn hoặc khi chúng ta chẳng những muốn tìm hiểu các hiện tượng mà còn muốn lợi dụng chúng phục vụ cho hoạt động của mình thì phương pháp quan sát là chưa đủ. Trong trường hợp này, khi nghiên cứu các đối tượng, các nhà khoa học hoặc là trực tiếp tác động vào đối tượng, hoặc sử dụng các mô hình tương tự (về mặt cấu trúc vật lý) như đối tượng, tiến hành thí nghiệm, trực tiếp tác động vào đối tượng cần nghiên cứu, phân tích kết quả để xác lập quy luật chi phối sự vận động của đối tượng. Đó là *phương pháp thí nghiệm, thử nghiệm có kiểm soát* và là phương pháp nghiên cứu phổ biến trong khoa học tự nhiên và kỹ thuật. Khi nghiên cứu các hiện tượng, vấn đề kinh tế - xã hội, các phương pháp trên thường không đem lại kết quả như mong muốn, bởi vì:

- Những vấn đề kinh tế vốn dĩ là những vấn đề hết sức phức tạp - đặc biệt là những vấn đề đương đại - trong đó có nhiều mối liên hệ đan xen, thậm chí tiềm ẩn mà chúng ta không thể chỉ bằng quan sát là có thể giải thích được.

- Qui mô, phạm vi liên quan của những vấn đề kinh tế - xã hội nhiều khi rất rộng và đa dạng, vì vậy khi dùng phương pháp thử nghiệm sẽ đòi hỏi chi phí rất lớn về thời gian, tiền bạc và nhiều khi những sai sót trong quá trình thử nghiệm sẽ gây ra hậu quả không thể lường trước được.

- Ngay cả trong trường hợp có đủ điều kiện tiến hành các thử nghiệm trong nghiên cứu kinh tế thì kết quả thu được cũng kém tin cậy vì các hiện tượng kinh tế - xã hội đều gắn với hoạt động của con người. Khi điều kiện thực tế khác biệt với điều kiện thử nghiệm, con người có phản ứng khác hẳn nhau.

Để nghiên cứu các hiện tượng, vấn đề kinh tế chúng ta phải sử dụng *phương pháp suy luận gián tiếp*, trong đó các đối tượng trong hiện thực có liên quan tới hiện tượng, vấn đề ta quan tâm nghiên cứu sẽ được thay thế bởi "hình ảnh" của chúng: các *Mô hình* của đối tượng và ta sử dụng mô hình làm công cụ phân tích và suy luận. Phương pháp này có tên gọi là *phương pháp mô hình*. Nội dung cơ bản của phương pháp mô hình bao gồm:

- Xây dựng, xác định mô hình của đối tượng. Quá trình này gọi là mô hình hoá đối tượng.

- Dùng mô hình làm công cụ suy luận phục vụ yêu cầu nghiên cứu. Quá trình này gọi là phân tích mô hình.

Phương pháp mô hình khắc phục được hạn chế của các phương pháp trên; đồng thời với việc phân tích mô hình.

phương pháp tạo khả năng phát huy tốt hiệu quả của tư duy lôgíc, kết hợp nhuần nhuyễn giữa các phương pháp phân tích truyền thống với hiện đại, giữa phân tích định tính với phân tích định lượng. Để có thể sử dụng có hiệu quả phương pháp mô hình hoá trong nghiên cứu kinh tế vấn đề cốt lõi là xác lập được mô hình của đối tượng nghiên cứu. Để hiểu rõ quá trình này chúng ta cần đề cập tới một số khái niệm cơ bản có liên quan.

2. Khái niệm Mô hình kinh tế và Mô hình toán kinh tế

a. Mô hình kinh tế

Có rất nhiều quan niệm về mô hình của đối tượng, từ hình thức đơn giản, trực quan đến hình thức khái quát, có sử dụng các khái niệm toán học trừu tượng. Với yêu cầu bước đầu làm quen với phương pháp mô hình, chúng ta sẽ đề cập tới quan điểm khá đơn giản về mô hình. Theo quan điểm này thì: mô hình của một đối tượng là sự phản ánh hiện thực khách quan của đối tượng; sự hình dung, tưởng tượng đối tượng đó bằng ý nghĩ của người nghiên cứu và việc trình bày, thể hiện, diễn đạt ý nghĩ đó bằng lời văn, chữ viết, sơ đồ, hình vẽ... hoặc một ngôn ngữ chuyên ngành. Như vậy mỗi mô hình bao gồm nội dung của mô hình và hình thức thể hiện nội dung. Mô hình của các đối tượng trong lĩnh vực hoạt động kinh tế gọi là *mô hình kinh tế.*

b. Mô hình toán kinh tế

Mô hình toán kinh tế là mô hình kinh tế được trình bày bằng ngôn ngữ toán học. Việc sử dụng ngôn ngữ toán học tạo

khả năng áp dụng các phương pháp suy luận, phân tích toán học và kế thừa các thành tựu trong lĩnh vực này cũng như trong các lĩnh vực khoa học có liên quan. Đối với các vấn đề phức tạp có nhiều mối liên hệ dan xen thậm chí tiềm ẩn mà chúng ta cần nghiên cứu, phân tích chẳng những về mặt định tính mà cả mặt định lượng thì phương pháp suy luận thông thường, phân tích giản đơn·không đủ hiệu lực để giải quyết. Chúng ta cần đến phương pháp suy luận toán học. Đây chính là điểm mạnh của các mô hình toán kinh tế. Chúng ta có thể thấy rõ hơn thông qua thí dụ sau:

Thí dụ 1.1: Giả sử chúng ta muốn nghiên cứu, phân tích quá trình hình thành giá cả của một loại hàng hoá A trên thị trường và giả định các yếu tố khác như điều kiện sản xuất hàng hoá A, thu nhập, sở thích của người tiêu dùng... đã cho trước và không thay đổi.

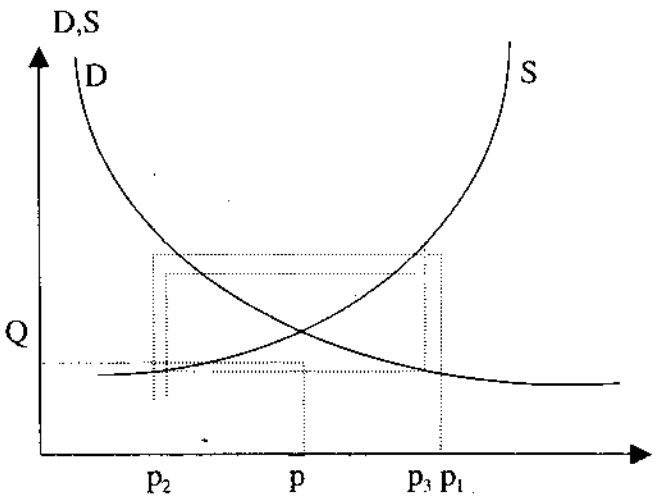
Đối tượng liên quan tới vấn đề nghiên cứu của chúng ta là thị trường hàng hoá A và sự vận hành của nó. Chúng ta cần mô hình hàng hoá đối tượng này.

+ ***Mô hình bằng lời:*** Xét thị trường hàng hoá A, nơi đó người bán, người mua gặp nhau và xuất hiện mức giá ban đầu. Với mức giá đó, lượng hàng hoá người bán muốn bán gọi là mức cung và lượng hàng hoá người mua muốn mua gọi là mức cầu. Nếu cung lớn hơn cầu, do người bán muốn bán được nhiều hàng hơn nên phải giảm giá vì vậy hình thành mức giá mới thấp hơn. Nếu cầu lớn hơn cung thì người mua sẵn sàng trả giá cao hơn để mua được hàng do vậy một mức giá cao hơn được hình thành. Với mức giá mới, xuất hiện mức cung, cầu mới. Quá trình tiếp diễn đến khi cung bằng cầu ở một mức giá gọi là giá cân bằng.

+Mô hình bằng hình vẽ:

Từ những điều mô tả bằng lời trong mô hình trên ta sẽ thể hiện bằng hình vẽ.

Vẽ đường cung S và đường cầu D trên cùng hệ trục toạ độ trong đó trục hoành biểu thị các mức giá, trục tung biểu thị mức cung, mức cầu hàng hoá ứng với các mức giá. Quá trình hình thành giá cân bằng được thể hiện qua sơ đồ minh hoạ dưới đây (còn gọi là mô hình mạng nhện):



Hình 1

Giải thích sơ đồ:

Nếu ở thời điểm bắt đầu xem xét thị thị trường, giá hàng là p_1 và giả sử $S_1 = S(p_1) > D_1 = D(p_1)$ khi đó dưới tác động của quy luật cung - cầu, giá p sẽ phải hạ xuống mức p_2.

Ở mức giá p_2 do $S_2 = S(p_2) < D_2 = D(p_2)$ nên giá sẽ tăng lên mức p_3.

Ở mức giá p_3 do $S_3 = S(p_3) > D_3 = D_3(p_3)$ nên giá sẽ giảm xuống mức p_4...

Quá trình cứ tiếp diễn cho đến khi $p = \bar{p}$, tại mức giá này có cân bằng cung - cầu.

+ Mô hình toán kinh tế

Gọi S, D là đường cung, đường cầu tương ứng. Như vậy ứng với từng mức giá p ta có: $S = S(p)$, do người bán sẵn sàng bán với mức giá cao hơn nên S là hàm tăng theo p, tức là $S'(p) = \dfrac{dS}{dp} > 0$; $D = D(p)$, do người mua sẽ mua ít hơn nếu giá cao hơn nên D là hàm giảm theo p, tức là $D'(p) = \dfrac{dD}{dp} < 0$.

Tình huống cân bằng thị trường (mức cung bằng mức cầu) sẽ có nếu: $S = D$. Viết gọn lại ta sẽ có mô hình cân bằng thị trường, ký hiệu là MHIA dưới đây:

$$\begin{aligned} &S = S(p); && S'(p) = \frac{dS}{dp} > 0. \\ &D = D(p); \\ &S = D && D'(p) = \frac{dD}{dp} < 0. \end{aligned}$$

Với mô hình diễn đạt bằng lời hoặc bằng hình vẽ ta không thể biết chắc rằng liệu quá trình hình thành giá trên thị trường có kết thúc hay không, tức là liệu có cân bằng thị trường hay không. Đối với mô hình toán kinh tế về cân bằng thị trường, ta sẽ có câu trả lời thông qua việc giải phương trình $S = D$ và phân tích đặc điểm của nghiệm.

Khi muốn đề cập tới các tác động của thu nhập (M), thuế (T)...tới quá trình hình thành giá, ta có thể mở rộng mô hình bằng cách đưa các yếu tố này tham gia vào các mối liên hệ với các yếu tố sẵn có trong mô hình phù hợp với các quy luật

trong lý thuyết kinh tế, chẳng hạn:S = S(p, T), D = D(p, M, T). Ký hiệu mô hình này là MHIB, mô hình có dạng:

$$S = S(p, T); \qquad \partial S/\partial P > 0.$$

$$D = D(p, M, T); \qquad \partial D/\partial p < 0$$

$$S = D.$$

II. CẤU TRÚC MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Cùng là sản phẩm của quá trình mô hình hoá nhưng mô hình toán kinh tế có những điểm khác biệt so với các loại mô hình khác. Quan sát mô hình MHIA trong thí dụ 1.1 chúng ta có thể thấy rõ điều này. Mô hình chứa một số yếu tố mang tính định lượng (S, D, p, S', D') và các hệ thức toán học liên hệ giữa chúng (các phương trình và bất phương trình). Đây là đặc trưng cơ bản, là hình thức kết cấu của mô hình toán kinh tế, do đó ta có thể dùng đặc trưng này để hình dung một cách cụ thể hơn về mô hình toán kinh tế so với khái niệm đã được giới thiệu ở mục trước. Ta sẽ quan niệm mô hình toán kinh tế là một tập gồm các biến số và các hệ thức toán học liên hệ giữa chúng nhằm diễn tả đối tượng liên quan tới sự kiện, hiện tượng kinh tế. Chúng ta sẽ phân tích chi tiết cấu trúc này của mô hình để định rõ vai trò của từng bộ phận cấu thành nhằm trợ giúp quá trình mô hình hoá.

1. Các biến số của mô hình

Để mô tả đối tượng và phân tích định lượng các hiện tượng và vấn đề kinh tế liên quan tới đối tượng, chúng ta cần phải xem xét và lựa chọn một số *yếu tố cơ bản* đặc trưng cho đối tượng và *lượng hoá* chúng. Các yếu tố này gọi là các đại lượng, các biến số (kinh tế) của mô hình. Chúng có thể thay

đổi giá trị trong phạm vi nhất định. Nhờ được lượng hoá nên ta có thể quan sát, đo lường và thực hiện tính toán giữa các biến số này. Tuỳ thuộc vào bản chất của các biến, mục đích nghiên cứu, phân tích cũng như khả năng về nguồn dữ liệu liên quan, các biến số kinh tế trong một mô hình được phân loại thành:

- **Biến nội sinh** (biến được giải thích): Là các biến mà về bản chất chúng phản ánh, thể hiện trực tiếp sự kiện, hiện tượng kinh tế và giá trị của chúng phụ thuộc vào giá trị của các biến khác trong mô hình. Nếu biết giá trị của các biến khác trong mô hình, ta có thể xác định giá trị cụ thể bằng số của các biến nội sinh bằng cách giải các hệ thức. Trong mô hình MHIA, chúng ta thấy các biến S, D, p, S', D' đều có thể phản ánh trực tiếp (hoặc gián tiếp) trạng thái của thị trường và chúng phụ thuộc lẫn nhau, do đó chúng đều có thể coi là các biến nội sinh. Tuy nhiên, người ta thường chỉ coi S, D, p là các biến nội sinh vì tại trạng thái cân bằng có thể tính được S' và D' từ các biến S, D, và p.

- **Biến ngoại sinh** (biến giải thích): Là các biến độc lập với các biến khác trong mô hình, giá trị của chúng được xem là tồn tại bên ngoài mô hình. Trong mô hình MHIB, các biến M, T có giá trị không phụ thuộc vào các biến khác, do đó chúng được gọi là các biến ngoại sinh.

Xét theo đặc điểm cấu trúc toán học, một mô hình có tất cả các biến đều là biến nội sinh gọi là mô hình đóng, ví dụ mô hình MHIA là mô hình đóng; mô hình có biến nội sinh và ngoại sinh gọi là mô hình mở, ví dụ mô hình MHIB là mô hình mở.

- **Tham số** (thông số): Là các biến số mà trong phạm vi nghiên cứu đối tượng chúng thể hiện các đặc trưng tương đối ổn định, ít biến động hoặc có thể giả thiết là như vậy của đối

tượng. Các tham số của mô hình phản ánh xu hướng, mức độ ảnh hưởng của các biến tới biến nội sinh. Thí dụ, nếu trong mô hình MHIB ta có $S = \alpha p^{\beta} T^{\gamma}$, khi đó các biến α, β, γ là các tham số của mô hình vì giá trị của chúng quyết định mức độ tác động của biến ngoại sinh T tới biến nội sinh S, D, p, (S', D').

Lưu ý rằng cùng một biến số, trong các mô hình khác nhau có thể đóng vai trò khác nhau; thậm chí trong cùng một mô hình nó cũng có thể có vai trò khác nhau do mục đích sử dụng mô hình khác nhau.

2. Mối liên hệ giữa các biến số - Các phương trình của mô hình

Các *quan hệ kinh tế* nảy sinh trong quá trình hoạt động kinh tế giữa các chủ thể kinh tế (tác nhân kinh tế), giữa chủ thể với Nhà nước, giữa các khu vực, bộ phận của nền kinh tế và giữa nền kinh tế của các quốc gia... tạo ra quan hệ giữa các biến số liên quan. Các mối quan hệ này là sự phản ánh, thể hiện tác động của các quy luật trong hoạt động kinh tế. Chúng ta có thể dùng các biểu thức, các hệ thức toán học một cách thích hợp từ đơn giản đến phức tạp để thể hiện mối quan hệ giữa các biến trong mô hình. Hệ thức thường được sử dụng phổ biến là ***phương trình*** (dấu bằng giữa hai vế). Phương trình của mô hình có thể tồn tại dưới dạng các hàm số, phương trình đại số, phương trình vi phân hoặc sai phân...

Tùy thuộc vào ý nghĩa thực tiễn của mối quan hệ giữa các biến có trong phương trình, chúng ta có thể phân loại các phương trình trong mô hình như sau:

+ ***Phương trình định nghĩa*** (đồng nhất thức): Phương trình thể hiện quan hệ định nghĩa giữa các biến số hoặc giữa hai biểu thức ở hai vế của phương trình. Thí dụ: Lợi nhuận

(LN) được định nghĩa là phần hiệu số giữa tổng doanh thu (TR) và tổng chi phí (TC); ta có thể viết: LN = TR – TC, phương trình này là một đồng nhất thức. Một thí dụ khác, xuất khẩu rong của một quốc gia (NX) là khoản chênh lệch giữa xuất khẩu (EX) và nhập khẩu (IM) của quốc gia đó. Thông thường xuất, nhập khẩu phụ thuộc vào thu nhập (Y), mức giá cả (P), tỷ giá hối đoái (ER)... do đó theo định nghĩa của xuất khẩu ròng, ta có thể viết:

$$NX = EX(Y, P, ER) - IM(Y, P, ER).$$

Trong mô hình MHIA, các phương trình:

$$S'(p) = dS/dp,\ D'(p) = dD/dp.$$

là các phương trình định nghĩa.

+ *Phương trình hành vi*: Phương trình mô tả quan hệ giữa các biến do tác động của các quy luật hoặc do giả định. Từ phương trình hành vi ta có thể biết sự biến động của biến nội sinh - "hành vi" của biến này - khi các biến số khác thay đổi. Sự biến động này có thể ám chỉ sự phản ứng trong hành vi của con người (ví dụ: Trong hành vi tiêu dùng, nếu thu nhập tăng lên thì người tiêu dùng sẽ chi tiêu nhiều hơn), nhưng cũng có thể chỉ là thể hiện quy luật về mối quan hệ phụ thuộc lẫn nhau giữa các biến số. Trong mô hình MHIA, các phương trình S = S(p); D = D(p) là các phương trình hành vi vì chúng thể hiện sự phản ứng của người sản xuất và người tiêu dùng trước sự thay đổi của giá cả.

+ *Phương trình điều kiện*: Phương trình mô tả quan hệ giữa các biến số trong các tình huống có điều kiện mà mô hình đề cập. Trong mô hình MHIA, phương trình S = D là phương trình điều kiện vì nó thể hiện điều kiện cân bằng thị trường.

III. PHÂN LOẠI MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

Chúng ta có thể phân loại mô hình theo các căn cứ khác nhau phụ thuộc vào nội dung, hình thức, quy mô, phạm vi, công dụng hay mục đích của chúng.

1. Phân loại mô hình theo đặc điểm cấu trúc và công cụ toán học sử dụng

+ ***Mô hình tối ưu:*** Mô hình phản ánh sự lựa chọn cách thức hoạt động nhằm tối ưu hoá một hoặc một số chỉ tiêu định trước. Cấu trúc cơ bản của mô hình là bài toán tối ưu có thể bao gồm bài toán quy hoạch, bài toán điều khiển tối ưu. Khi phân tích mô hình tối ưu, công cụ chính được sử dụng là các phương pháp tối ưu trong toán học.

+ ***Mô hình cân bằng:*** Lớp mô hình này được gọi là tên theo mục đích phân tích mô hình, đó là lớp mô hình xác định sự tồn tại của trạng thái cân bằng nếu có và phân tích sự biến động của trạng thái này khi các biến ngoại sinh hay các tham số thay đổi. Mô hình thể hiện đối tượng trong trạng thái đặc biệt gọi là trạng thái cân bằng. Trong nhóm này bao gồm các mô hình cân bằng thị trường, mô hình cân đối. Công cụ thường sử dụng để phân tích mô hình là các phương pháp giải hệ phương trình, tìm điểm bất động.

Lưu ý rằng, có nhiều chuyên gia toán kinh tế với quan niệm tổng quát về trạng thái cân bằng nên đã coi nhóm mô hình tối ưu thuộc lớp mô hình cân bằng. Tuy nhiên theo đặc điểm cấu trúc toán học, chúng ta sẽ tách riêng hai nhóm này.

+ ***Mô hình tất định, mô hình ngẫu nhiên:*** Mô hình với các biến là tất định (phi ngẫu nhiên) gọi là mô hình tất định, nếu có chứa biến ngẫu nhiên gọi là mô hình ngẫu nhiên.

+ ***Mô hình toán kinh tế và mô hình kinh tế lượng:*** Với quan niệm được diễn đạt ở trên về mô hình toán kinh tế, về mặt hình thức, ta có thể xem các mô hình kinh tế lượng cũng là các mô hình toán kinh tế và thuộc lớp mô hình ngẫu nhiên. Tuy nhiên, trong thực tế người ta thường phân biệt chúng vì lý do kỹ thuật phân tích và ứng dụng. Đối với các mô hình toán kinh tế, các *tham số* của mô hình hoặc là cho trước hoặc được giả định rằng đã biết và khi phân tích ta sử dụng các phương pháp toán học thuần tuý; trong khi đó đối với mô hình kinh tế lượng các *tham số* lại chính là các *ẩn số*, giá trị của chúng được xác định nhờ các phương pháp suy đoán thống kê căn cứ vào giá trị quá khứ của các biến khác trong mô hình.

+***Mô hình tĩnh (theo thời gian), mô hình động:*** Mô hình có các biến mô tả hiện tượng kinh tế tồn tại ở một thời điểm hay một khoảng thời gian đã xác định (thời gian cố định) gọi là mô hình tĩnh. Mô hình mô tả hiện tượng kinh tế trong đó có các biến phụ thuộc vào thời gian gọi là mô hình động.

2. Phân loại mô hình theo quy mô, phạm vi, thời hạn

Theo quy mô của các yếu tố ta có các mô hình:

+ ***Mô hình vĩ mô:*** Mô hình mô tả các hiện tượng kinh tế liên quan đến một nền kinh tế, một khu vực kinh tế gồm một số nước.

+ ***Mô hình vi mô:*** Mô hình mô tả một thực thể kinh tế nhỏ, hoặc những hiện tượng kinh tế với các yếu tố ảnh hưởng trong phạm vi hẹp và ở mức độ chi tiết.

Theo thời hạn mà mô hình đề cập ta có: Mô hình ngắn hạn (tác nghiệp), mô hình dài hạn.

Ngoài ra, có thể phân loại mô hình theo các chuẩn mực khác mà chúng ta không đề cập ở đây.

IV. NỘI DUNG CỦA PHƯƠNG PHÁP MÔ HÌNH TRONG NGHIÊN CỨU VÀ PHÂN TÍCH KINH TẾ

1. Nội dung cơ bản của phương pháp mô hình

Để áp dụng phương pháp mô hình, trong đó sử dụng mô hình toán kinh tế làm công cụ nghiên cứu, phân tích các vấn đề, các hiện tượng kinh tế chúng ta cần tiến hành các bước sau:

a. Đặt vấn đề

Chúng ta cần diễn đạt rõ vấn đề, hiện tượng nào trong hoạt động kinh tế cần quan tâm, mục đích là gì, các nguồn lực có thể huy động để tham gia nghiên cứu (con người, tài chính, thông tin, thời gian...).

b. Mô hình hoá

Sau khi xác định được mục đích, yêu cầu cần nghiên cứu, chúng ta sẽ tiến hành quá trình mô hình hoá đối tượng liên quan tới vấn đề. Về cơ bản, quá trình gồm các công việc:

- Xác định các yếu tố, sự kiện cần xem xét cùng các mối liện hệ trực tiếp giữa chúng mà ta có thể cảm nhận bằng trực quan hoặc căn cứ vào cơ sở lý luận đã lựa chọn.

- Lượng hoá các yếu tố này, coi chúng là các biến của mô hình. Trong thực tế, có nhiều yếu tố vốn dĩ mang bản chất định lượng vì vậy vấn đề chỉ là xác định đơn vị đo lường thích hợp; tuy nhiên có thể có những yếu tố định tính mà nhiều khi ta cần sử dụng các phương pháp trong thống kê, kinh tế lượng để lượng hoá chúng.

- Xem xét vai trò của các biến số và thiết lập các hệ thức toán học - chủ yếu là các phương trình - mô tả quan hệ giữa các biến. Đây thường là phần quan trọng và khó khăn nhất của quá trình mô hình hoá. Để có thể làm tốt khâu này chúng ta cần dựa vào cơ sở lý luận đủ mạnh và đáng tin cậy cả về phương diện kinh tế lẫn toán học. Kết thúc công việc này ta sẽ có được mô hình ban đầu.

c. Phân tích mô hình

Sử dụng phương pháp phân tích mô hình (sẽ được trình bày chi tiết ở phần dưới) để phân tích. Kết quả phân tích có thể dùng để hiệu chỉnh mô hình (thay đổi vài trò của biến, thêm, bớt biến, thay đổi định dạng phương trình...) cho phù hợp với thực tiễn.

d. Giải thích kết quả

Dựa vào kết quả phân tích mô hình ta sẽ đưa ra giải đáp cho vấn đề cần nghiên cứu. Nếu ta thay đổi vấn đề, hoặc mục đích nghiên cứu nhưng đối tượng liên quan không thay đổi thì vẫn có thể sử dụng mô hình sẵn có.

2. Thí dụ minh hoạ

Thí dụ dưới đây nhằm minh hoạ quá trình xác lập và sử dụng mô hình toán kinh tế trong phân tích kinh tế nên sẽ giới hạn trong phạm vi đơn giản.

Thí dụ 1.2: Khi điều chỉnh một sắc thuế đánh vào việc sản xuất và tiêu thụ một loại hàng hoá A (ví dụ, tăng thuế suất), Nhà nước *quan tâm* tới phản ứng của thị trường tới việc điều chỉnh này - thể hiện bởi sự thay đổi của giá cả cũng như lượng hàng hoá lưu thông - và *muốn dự kiến trước* được

phản ứng này, đặc biệt là vấn đề định lượng. Từ đó có căn cứ *tính toán mức điều chỉnh thích hợp* tránh tình trạng bất ổn của thị trường.

Đặt vấn đề: Để đáp ứng yêu cầu trên, chúng ta cần *phân tích tác động trực tiếp* (ngắn hạn) của thuế đối với việc sản xuất và tiêu thụ loại hàng hoá A trên thị trường.

Mô hình hoá: Đối tượng liên quan tới vấn đề cần phân tích là thị trường hàng hoá A cùng sự hoạt động của nó trong trường hợp có xuất hiện yếu tố thuế, chúng ta sẽ mô hình hoá đối tượng này.

Theo lý thuyết kinh tế vi mô, chúng ta biết rằng có mối liên hệ khăng khít giữa việc sản xuất (mức cung), tiêu thụ (mức cầu) và giá cả hàng hoá trên thị trường và nó bị chi phối bởi quy luật cung - cầu, hơn nữa, thuế ảnh hưởng tới giá cả và do đó tác động tới mức cung và mức cầu. Mặt khác thực tiễn diễn biến của thị trường cũng cho thấy là các thị trường trong quá trình hoạt động có xu thế hướng về trạng thái cân bằng. Các yếu tố (biến số) ta cần xem xét là mức cung (S), mức cầu (D), giá cả (p) và thuế (T). Bằng cách lập luận tương tự như trong thí dụ 1.1, ta có mô hình:

$$S = S(p, T) \qquad (S' = \partial S/\partial p > 0).$$

$$D = D(p, T) \qquad (D' = \partial D/\partial p < 0).$$

$$S = D.$$

trong đó S, D, p là các biến nội sinh, T là biến ngoại sinh.

Để định dạng cụ thể cho các hàm trong mô hình ta có thể sử dụng các phương pháp trong kinh tế lượng.

Phân tích: Giải phương trình cân bằng, giả sử được nghiệm là $\bar{p}$. Rõ ràng $\bar{p}$ sẽ phụ thuộc vào T nên ta có thể

viết $\bar{p} = \bar{p}(T)$. Thay $\bar{p}$ vào các hàm cung, cầu ta tính được lượng cân bằng:

$\bar{Q} = S(\bar{p}(T), T = D(\bar{p}(T), T)$. Với các giả thiết. thích hợp về mặt toán học, ta có thể tính được các biểu thức: $d\bar{p}/dT$, $d\bar{Q}/dT$ và chúng phản ánh tác động của thuế T tới giá và lượng cân bằng.

Giải thích kết quả: Để phân tích tác động của thuế T tới giá cả và lượng hàng hoá lưu thông trên thị trường, về mặt định tính ta chỉ cần xét dấu của các biểu thức $d\bar{p}/dT$, $d\bar{Q}/dT$. Nếu muốn có đánh giá về lượng ta cần có thông tin, dữ liệu cụ thể của các biến để có thể định dạng chi tiết và ước lượng (dạng số) mô hình.

V. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH MÔ HÌNH - PHÂN TÍCH SO SÁNH TĨNH

Sau khi đã xây dựng và hiệu chỉnh mô hình phù hợp với hiện tượng và quá trình kinh tế, ta có thể sử dụng mô hình vào các mục đích khác nhau. Trước tiên, ta cần thực hiện công việc gọi là *giải mô hình*. Một cách tổng quát, giải mô hình là việc sử dụng các phương pháp toán học để giải các hệ thức của mô hình - có thể là giải phương trình (đại số hoặc vi, sai phân), giải bài toán quy hoạch... nhằm xác định quan hệ trực tiếp giữa biến nội sinh và biến ngoại sinh cùng tham số, tức là ta phải biểu diễn dưới dạng các hệ thức toán học giữa từng biến nội sinh theo biến ngoại sinh, tham số và có thể theo biến nội sinh khác. Cách biểu diễn này gọi là *nghiệm của mô hình*. Nghiệm có thể là chính xác hoặc xấp xỉ dưới dạng lời giải bằng số nếu tất cả các biến ngoại sinh và tham số có giá trị bằng số nhưng cũng có thể dưới dạng các biểu

thức, các tham số (hiện hoặc ẩn) nếu biến ngoại sinh, tham số có giá trị quy ước trừu tượng. Rõ ràng là nghiệm của mô hình sẽ phụ thuộc các biến ngoại sinh và tham số. Điều chúng ta quan tâm phân tích là khi biến ngoại sinh thay đổi giá trị sẽ tác động như thế nào tới nghiệm. Phân tích này gọi là *phân tích so sánh tĩnh*. Chúng ta sẽ xét chi tiết hơn phương pháp phân tích so sánh tĩnh và việc ứng dụng toán đối với phương pháp trong phần dưới đây.

1. Đo lường sự thay đổi của biến nội sinh theo biến ngoại sinh

Phân tích so sánh tĩnh đòi hỏi phải đo lường sự phản ứng, biến động (tức thời) cả về xu hướng, độ lớn của biến nội sinh khi một biến ngoại sinh có sự thay đổi nhỏ, còn các biến ngoại sinh khác không đổi hoặc khi các biến ngoại sinh cùng thay đổi. Chúng ta có thể dùng đạo hàm và vi phân để đo lường sự thay đổi này.

Giả sử nghiệm của mô hình có biến nội sinh Y phụ thuộc vào các biến ngoại sinh $X_1, X_2,...,X_n$ như sau $Y = F(X_1, X_2,..., X_n)$, trong F có thể có các tham số α ,β... Ký hiệu $X = (X_1, X_2,..., X_n)$, khi đó có thể viết $Y = F(X, \alpha, \beta...)$.

a. Đo lường sự thay đổi tuyệt đối

- Xét hàm $Y = F(X_1, X_2,..., X_n)$, tại $X = X^0$, gọi là sự thay đổi của Y là ΔY_i khi chỉ có X_i thay đổi một lượng nhỏ ΔX_i, tức là:

$$\Delta Y_i = F(X_1,.., X_i + \Delta X_i ,..., X_n) - F(X_1,..., X_i,..., X_n)$$

Ta có lượng thay đổi trung bình của Y theo X_i là : $\rho = \frac{\Delta Y_i}{\Delta X_i}$.

Trong trường hợp F khả vi theo X_i ta có tốc độ thay đổi tức thời tại điểm $X = X^0$ đang xét là: $\rho(X_i) = \frac{\partial F(X^0)}{\partial X_i}$.

Nếu ΔX_i khá nhỏ thì $\rho(X_i) \approx \rho$, vì vậy nếu $\Delta X_i = 1$ thì $\rho(X_i) = \Delta Y_i$.

Thí dụ 1.3: Chi phí C(Q) phụ thuộc sản lượng Q và được mô hình hoá như sau:

$$C(Q) = Q^3 - 61,25Q^2 + 1528,5Q + 2000$$

Sự thay đổi của C khi Q tăng (giảm) một đơn vị (chi phí cận biên), kí hiệu MC, được xác định bởi biểu thức:

$$MC(Q) = 3Q^2 - 122,5Q + 1528,5.$$

- Trong trường hợp tất cả các biến ngoại sinh đều thay đổi với các lượng khá nhỏ ký hiệu là $\Delta X_1, \Delta X_2, ..., \Delta X_n$, để tính sự thay đổi của biến nội sinh Y ta dùng công thức xấp xỉ:

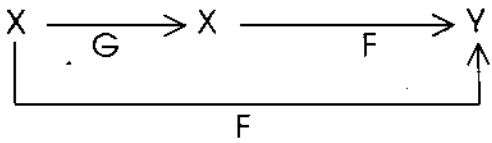
$$\Delta Y \approx \frac{\partial F}{\partial X_1}\Delta X_1 + \frac{\partial F}{\partial X_2}\Delta X_2 + ... + \frac{\partial F}{\partial X_n}\Delta X_n$$

Nếu $\Delta X_1, \Delta X_2, ... \Delta X_n$ là các vi phân của biến ngoại sinh thì ta có thể sử dụng công thức vi phân toàn phần:

$$dY = \frac{\partial F}{\partial X_1}dX_1 + \frac{\partial F}{\partial X_2}dX_2 + ... + \frac{\partial F}{\partial X_n}dX_n$$

- Nếu bản thân X_i lại là biến nội sinh phụ thuộc vào một hoặc nhiều biến khác thì để đo lường sự thay đổi của biến Y theo sự thay đổi của X_i ta sử dụng công thức tính đạo hàm của hàm hợp.

Thí dụ 1.4: Giả sử Y = F (X_1, X_2); = G (X_1), Y, X_2 là biến nội sinh, X_1 là biến ngoại sinh. Ta có thể minh hoạ quan hệ giữa các biến qua sơ đồ kênh liên hệ:



Khi đó ta có:

$$\frac{dY}{dX_1} = \frac{\partial F}{\partial X_2}\frac{dX_2}{dX_1} + \frac{\partial F}{\partial X_1} \quad (1.1)$$

(1.1)

ảnh hưởng tổng cộng | ảnh hưởng gián tiếp thông qua X_2 | ảnh hưởng trực tiếp

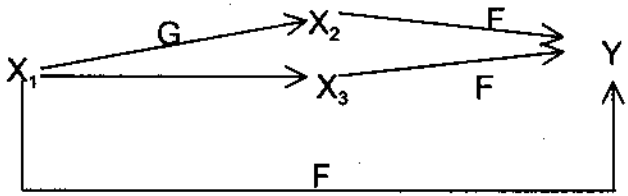
Thí dụ 1.5: Giả sử $Y = F(X_1, X_2, X_3)$

$X_2 = G(X_1)$

$X_3 = H(X_1)$,

Y, X_2, X_3 là biến nội sinh, X_1 là biến ngoại sinh.

Sơ đồ kênh liên hệ:

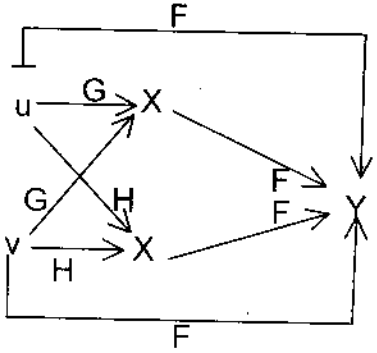


Ta có:

$$\frac{dY}{dX_1} = \frac{\partial F}{\partial X_2}\frac{dX_2}{dX_1} + \frac{\partial F}{\partial X_3}\frac{dX_3}{dX_1} + \frac{\partial F}{\partial X_1} \quad (1.2)$$

ảnh hưởng tổng cộng | ảnh hưởng gián tiếp thông qua X_2 | ảnh hưởng gián tiếp thông qua X_3 | ảnh hưởng trực tiếp

Thí dụ 1.6:



$Y = F(X_1, X_2, u, v)$
$X_1 = G(u, v)$
$X_2 = H(u, v)$; u, v là biến ngoại sinh

Khi u thay đổi, v không đổi, sự thay đổi tuyệt đối của Y được tính theo công thức dưới đây:

$$\left.\frac{dY}{du}\right|_{dv=0} = \frac{\partial F}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial X_2}\frac{\partial X_2}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u} \qquad (1.3)$$

ảnh hưởng tổng cộng	ảnh hưởng gián tiếp thông qua X_1	ảnh hưởng gián tiếp thông qua X_2	ảnh hưởng trực tiếp

- Trong trường hợp quan hệ giữa biến nội sinh và biến ngoại sinh không thể hiện dưới dạng tường minh mà dưới dạng hàm ẩn thì để tính sự thay đổi tuyệt đối ta cần áp dụng công thức tính đạo hàm của hàm ẩn. Nếu biến nội sinh Y có liên hệ với các biến ngoại sinh $X_1, X_2, ..., X_n$ dưới dạng:

$$F(Y, X_1, X_2, ..., X_n) = 0$$

thì phương trình trên gọi là phương trình hàm ẩn.

Khi đó để tính đạo hàm của Y theo X_i ta dùng công thức:

$$\frac{\partial Y}{\partial X_i} = -\frac{\partial F}{\partial X_i} : \frac{\partial F}{\partial Y} \qquad (i = 1 \div n) \qquad (1.4)$$

Thí dụ 1.7: Giả sử Y và X_1, X_2 có liên hệ với nhau theo biểu thức:

$$Y^2 = X_1^2 + X_2^2$$

Rõ ràng giữa Y và X_1, X_2 có mối liên hệ hàm số nhưng dưới dạng hàm ẩn. Ta cần tìm $\frac{\partial Y}{\partial X_i}$ $(i = 1, 2)$. Ta có thể viết:

$$Y^2 - X_1^2 + X_2^2 = 0$$

áp dụng công thức (1.4) ta tính được:

$$\frac{\partial Y}{\partial X_i} = X_i/Y \ (i = 1, 2)$$

b. Đo lường sự thay đổi tương đối: Hệ số co giãn

Để đo tỉ lệ của sự thay đổi tương đối (tức thời) của biến nội sinh với sự thay đổi tương đối của 1 biến ngoại sinh, người ta dùng hệ số co giãn (hệ số co giãn riêng). Hệ số co giãn (độ co giãn) của biến Y theo biến X_i tại $X = X^0$, ký hiệu là $\varepsilon_{X_i}^{Y}(X^0)$ - được định nghĩa bởi công thức:

$$\varepsilon_{X_i}^{Y}(X^0) = \frac{\partial F(X^0)}{\partial X_i} \frac{X_i^0}{F(X^0)} \qquad (1.5)$$

Hệ số này cho biết tại $X = X^0$, khi biến X_i thay đổi 1% thì Y thay đổi bao nhiêu %. Nếu hệ số co giãn $\varepsilon_{X_i}^{Y}(X^0) > 0$ thì X_i, Y thay đổi tương đối cùng hướng, ngược lại $\varepsilon_{X_i}^{Y}(X^0) < 0$ thì X_i, Y thay đổi tương đối ngược hướng.

Nếu muốn đo lường sự thay đổi tương đối của Y khi tất cả các biến ngoại sinh đều thay đổi (tương đối) theo cùng một tỉ lệ ta dùng hệ số co giãn chung (toàn phần) được tính theo công thức dưới đây:

$$\varepsilon^{Y}_{X_i}(X^0) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^{Y}_{X_i}(X^0) \qquad (1.6)$$

trong đó $\varepsilon^{Y}_{X_i}(X^0)$ là hệ số co giãn (riêng) của Y theo X_i tính tại X^0. ε^{Y} cho chúng ta biết tại $X = X^0$, tỉ lệ % thay đổi của Y khi tất cả các biến X_i cùng thay đổi 1%. Xu hướng thay đổi của Y phụ thuộc vào dấu và độ lớn của các hệ số co giãn riêng.

Nói chung hệ số co giãn của Y (riêng hoặc toàn phần) phụ thuộc điểm chúng ta tính, tức là phụ thuộc vào các biến ngoại sinh. Tuy nhiên, nếu quan hệ giữa Y và các biến ngoại sinh có dạng:

$$Y = \alpha_0 X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_n^{\alpha_n}$$

với $\alpha_0, \alpha_1 \ldots, \alpha_n$ là các tham số (dạng hàm Cobb – Douglas), khi đó có thể chứng minh được rằng:

$$\varepsilon^{Y}_{X_i}(X) = \alpha_i \quad (i = 1 \div n) \qquad (1.7)$$

và do đó:

$$\varepsilon^{Y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \qquad (1.8)$$

Thí dụ 1.8: Với Q là mức sản lượng, K là vốn và L là khối lượng lao động được sử dụng người ta có mô hình quen thuộc (mô hình hàm sản xuất), giả sử có dạng: $Q = aK^{\alpha}L^{\beta}$ với $\alpha, \beta > 0$. Ta có $\varepsilon^{Q}_{K} = \alpha$, $\varepsilon^{Q}_{L} = \beta$ và $\varepsilon^{Q} = \alpha + \beta$.

Nếu $Y, X_i > 0$, khi đó hệ số co giãn $\varepsilon^{Y}_{X_i}$ có thể tính theo công thức:

$$\varepsilon^{Y}_{X_i} = \partial(\mathrm{Ln}Y)/\partial(\mathrm{Ln}X_i) \qquad (1.9)$$

trong đó LnY, $\mathrm{Ln}X_i$ là loga cơ số tự nhiên của Y, X_i.

Sử dụng các quy tắc tính đạo hàm, ta có thể chứng minh các công thức sau:

Cho $U = G(X), V = H(X)$

Nếu $Y = UV$ thì $\varepsilon_X^Y = \varepsilon_X^U + \varepsilon_X^V$ (1.10)

Nếu $Y = U/V$ thì $\varepsilon_X^Y = \varepsilon_X^U - \varepsilon_X^V$ (1.11)

Nếu gọi $\frac{\partial F}{\partial X_i}$ là hàm cận biên - ký hiệu là MF_i - và gọi $\frac{Y}{X_i}$ là hàm trung bình - ký hiệu là AF_i - của Y theo X_i thì:

$$\varepsilon_{X_i}^Y = \frac{MF_i}{AF_i} \qquad (1.2)$$

2. Tính hệ số tăng trưởng (nhịp tăng trưởng)

Nếu trong trường hợp mô hình có biến ngoại sinh là biến thời gian, khi này sự biến động của biến nội sinh theo thời gian được đo bằng hệ số tăng trưởng (nhịp tăng trưởng). Hệ số tăng trưởng của một biến đo tỉ lệ biến động của biến theo đơn vị thời gian.

Giả sử $Y = F(X_1, X_2, \ldots X_n, t)$ với t là biến thời gian. Hệ số tăng trưởng của Y - ký hiệu là r_Y - được định nghĩa theo công thức:

$$r_y = \frac{\frac{\partial Y}{\partial t}}{Y} \qquad (1.3)$$

Thông thường r_Y được tính theo tỉ lệ %.

Thí dụ 1.9: Với công thức tính lãi kép liên tục, ta có lượng tiền thu được tại thời điểm t (V_t) tính theo công thức: $V_t = V_0 e^{rt}$; trong đó: V_0 là vốn gốc, r là lãi suất, t là thời gian.

Hệ số tăng trưởng của V_t là: $r_v = \frac{\frac{\partial V_t}{\partial t}}{V_t} = r.$

Nếu thời gian t không quá dài hoặc lãi suất r tính theo từng chu kỳ thì công thức trên có dạng:

$V_t = V_0 (1 + r)^t$ và do đó hệ số tăng trưởng của V_t là $Ln(1 + r) \approx r$.

Từ công thức định nghĩa hệ số tăng trưởng và các quy tắc tính đạo hàm, ta có thể chứng minh các công thức sau:

Cho $U = G(t), V = H(t)$

Nếu $Y = UV$ thì $r_Y = r_U + r_V$ (1.14)

Nếu $Y = U/V$ thì $r_Y = r_U - r_V$ (1.15)

Nếu $Y = U + V$ thì $\frac{U}{U+V} r_U + \frac{V}{U+V} r_V$ (1.16)

Nếu $Y = U - V$ thì $\frac{U}{U-V} r_U - \frac{V}{U-V} r_V$ (1.17)

Tổng quát hơn, nếu biến nội sinh phụ thuộc thời gian một cách gián tiếp thông qua sự phụ thuộc vào thời gian của các biến khác, tức là hàm số có dạng: $Y = F(X_1(t), X_2(t),..., X_n(t))$ khi đó hệ số tăng trưởng của Y có thể tính dựa vào hệ số tăng trưởng của các biến X_i theo công thức:

$$r_Y = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{X_i}^{Y} r_{X_i} \qquad (1.18)$$

trong đó $\varepsilon_{X_i}^{Y}$ là hệ số co giãn của Y theo X_i và r_{X_i} là hệ số tăng trưởng của X_i.

3. Tính hệ số thay thế (bổ sung, chuyển đổi)

Giả sử $Y = F(X_1, X_2,..., X_n)$, tại $X = X^0$ giá trị tương ứng của Y là $Y = F(X^0) = Y^0$. Vấn đề đặt ra là nếu ta cho hai biến ngoại sinh thay đổi và cố định các biến khác sao cho Y không

đổi, tức là $Y = Y^0$, thì sự thay đổi của hai biến này phải theo tỉ lệ nào? Tuỳ thuộc vào ý nghĩa thực tiễn của hai biến, tỉ lệ này có thể gọi là tỉ lệ (hệ số) thay thế (ví dụ: thay thế giữa vốn và lao động), tỷ lệ bổ sung (ví dụ: bổ sung giữa hai mặt hàng), tỉ lệ chuyển đổi (ví dụ: chuyển đổi giữa tiêu dùng hiện tại và tiêu dùng tương lai). Ta có thể tính hệ số này như sau:

Theo công thức vi phân toàn phần ta có:

$$dY \frac{\partial F}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial F}{\partial X_2} dX_2 + ... + \frac{\partial F}{\partial X_n} dX_n.$$

Giả sử ta cho các biến X_i, X_j biến đổi, do Y và X_k ($k \neq i,j$) không đổi nên:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial X_i} dX_i + \frac{\partial F}{\partial X_j} dX_j$$

suy ra:

$$\frac{dX_i}{dX_j} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial X_j}}{\frac{\partial F}{\partial X_i}} \qquad (1.19)$$

Nếu $\frac{dX_i}{dX_j} < 0$ thì ta nói rằng X_i có thể thay thế (chuyển đổi) được cho X_j (tại $X = X^0$) và với tỉ lệ $\left|\frac{dX_i}{dX_j}\right|$, tỉ lệ này cho ta biết khi giảm (tăng) mức X_j một đơn vị thì phải tăng (giảm) mức X_i bao nhiêu đơn vị để giữ nguyên mức của Y và được gọi là hệ số thay thế (cận biên) của X_i cho X_j.

Nếu $\frac{dX_i}{dX_j} > 0$ thì ta nói rằng X_i, X_j bổ sung cho nhau (tại

$X = X^{(0)}$) và tỉ lệ $\frac{dX_i}{dX_j}$, tỉ lệ này cho ta biết khi tăng (giảm) mức X_j một đơn vị thì phải tăng (giảm) mức X_i bao nhiêu đơn vị để giữ nguyên mức của Y và được gọi là hệ số bổ sung (cận biên) của X_i cho X_j.

Nếu $\frac{dX_i}{dX_j} = 0$ thì ta nói rằng X_i, X_j không thể thay thế (hoặc bổ sung) cho nhau (tại $X = X^{(0)}$).

Lưu ý rằng các hệ số thay thế (hoặc bổ sung) trong trường hợp tổng quát sẽ phụ thuộc vào điểm chúng ta tính chúng.

VI. ÁP DỤNG PHÂN TÍCH MÔ HÌNH ĐỐI VỚI MỘT SỐ MÔ HÌNH KINH TẾ PHỔ BIẾN

Với phương pháp phân tích so sánh tĩnh đã được giới thiệu ở mục trên, chúng ta có thể sử dụng để phân tích một số mô hình kinh tế phổ biến; những mô hình đã được lí thuyết kinh tế định dạng.

1. Mô hình tối ưu

Các mô hình tối ưu thường được sử dụng trong phân tích kinh tế vi mô nhằm nghiên cứu các hoạt động chi tiết của cơ chế thị trường, đề cập tới các tình huống khi một nền kinh tế giải đáp các vấn đề kinh tế cơ bản (sản xuất cái gì, như thế nào, và cho ai). Thông qua các mô hình tối ưu ta có thể phân tích cách ứng xử, hành vi của các tác nhân kinh tế khi họ theo đuổi mục đích của mình. Trong phạm vi chương trình môn học, chúng ta làm quen với một số mô hình đề cập tới hành vi sản xuất và tiêu dùng.

a. Mô hình phân tích hành vi sản xuất

Sản xuất được hiểu là một quá trình biến đổi đầu vào (các yếu tố sản xuất, các nguồn lực) thành đầu ra (sản phẩm vật chất, dịch vụ). Tác nhân thực hiện quá trình sản xuất gọi là *doanh nghiệp*. Trong kinh tế thị trường, doanh nghiệp tham gia hoạt động sản xuất, kinh doanh vì mục tiêu lợi nhuận, hơn nữa là lợi nhuận cực đại (đặc biệt khi chúng ta xét về dài hạn). Để đạt mục tiêu này, doanh nghiệp phải lựa chọn các loại yếu tố sản xuất cùng mức độ sử dụng, mức sản lượng cung ứng cho thị trường và giá bán sản phẩm căn cứ vào thực lực của doanh nghiệp (trình độ công nghệ, trình độ quản lí, khả năng nguồn tự có...) và các điều kiện liên quan tới thị trường đầu vào và thị trường đầu ra. Toàn bộ quá trình lựa chọn này là hành vi của doanh nghiệp. Như vậy, hành vi của doanh nghiệp có liên quan tới:

- Tình trạng công nghệ của doanh nghiệp (bao hàm cả trình độ quản lí, điều hành)

- Các điều kiện trên thị trường yếu tố sản xuất, trong đó doanh nghiệp với tư cách là người mua

- Các điều kiện trên thị trường sản phẩm, trong đó doanh nghiệp với tư cách là người bán.

Một số mô hình sau đây thường dùng để phân tích hành vi của doanh nghiệp:

+ Mô hình hàm sản xuất

Để mô tả tình trạng công nghệ của doanh nghiệp chúng ta sẽ sử dụng mô hình *hàm sản xuất*. Đây là mô hình đơn giản vì chỉ có một biến nội sinh và một phương trình.

Mô hình hoá công nghệ: Giả sử với trình độ công nghệ

hiện có doanh nghiệp có thể sử dụng n loại yếu tố để tạo ra sản phẩm và nếu các yếu tố được sử dụng ở mức X_1,..., X_n, doanh nghiệp thu được Q đơn vị sản phẩm (dạng hiện vật hoặc giá trị). Như vậy có một mối quan hệ giữa mức sử dụng các yếu tố và mức sản lượng và quan hệ này đặc trưng cho tình trạng công nghệ của doanh nghiệp. Ta sẽ thể hiện quan hệ này bằng quan hệ hàm số: $Q = F(X_1,..., X_n)$ - hoặc viết gọn hơn $Q = F(X)$ với $X = (X_1,..., X_n)$ - và gọi là hàm sản xuất của doanh nghiệp. Mô hình hàm sản xuất có biến nội sinh là mức sản lượng Q, các biến ngoại sinh là mức sử dụng các yếu tố X_1,..., X_n và có thể chứa các tham số. Lưu ý rằng hàm sản xuất là hàm mô tả quan hệ giữa kết quả sản xuất có hiệu quả nhất (về mặt kĩ thuật) phụ thuộc vào các yếu tố sản xuất.

Chúng ta có thể dùng mô hình hàm sản xuất gộp để mô tả tình trạng công nghệ của một ngành, một vùng, thậm chí nền sản xuất của quốc gia. Với hàm gộp, các yếu tố thường được nhóm gộp thành các yếu tố chính là vốn, lao động, tài nguyên, ngoài ra có thể đề cập tới tiến bộ kĩ thuật.

Thí dụ 1.10:

+ Với số liệu Việt Nam 1986-1995 (theo *Niên giám thống kê*), ước lượng được hàm sản xuất: $Q = 75114K^{0,175}L^{0,904}e^{0,0124t}$ trong đó Q, K, L: Giá trị sản xuất, vốn và lao động, t: Biến thời gian, e: Cơ số tự nhiên.

+ Với số liệu của nước Áo từ 1951-1955 trong nông nghiệp người ta ước lượng được:

$$Q = 2,439X^{0,0635}K^{0,6172}L^{0,3193}$$

trong đó Q, K, L: Giá trị sản xuất, vốn và lao động, X: Nguồn tài nguyên được khai thác.

+ Các dạng hàm sản xuất phổ biến là:

- Dạng tuyến tính:

$$Q = a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n$$

Đặc điểm quan trọng nhất của hàm dạng tuyết tính là hệ số thay thế giữa các biến không đổi. Có thể dễ dàng tính được hệ số thay thế của X_i cho X_j là: $c(i, j) = -a_j/a_i$.

- Hàm sản xuất dạng Cobb-Douglas với vốn là lao động:

$$Q = a K^{\alpha} L^{\beta} \text{ với a, } \alpha, \beta > 0 \text{ là các tham số.}$$

trong đó: Y là sản lượng, K là vốn, L là lao động.

Phân tích mô hình: tác động của yếu tố sản xuất tới sản lượng

Với công cụ là hàm sản xuất và một số hàm kinh tế dẫn xuất từ hàm này chúng ta có thể phân tích chi tiết hơn tình trạng công nghệ của doanh nghiệp trong việc sử dụng có hiệu quả các yếu tố.

+ Về mặt ngắn hạn, với công nghệ hiện có, doanh nghiệp chỉ có khả năng thay đổi một số yếu tố có tính lưu động. Chúng ta có thể đo lường hiệu quả của việc sử dụng các yếu tố đó bằng các thước đo sau:

- Năng suất biên của yếu tố i (sản phẩm hiện vật biên): $MP_i = \frac{\partial F}{\partial X_i}$

MP_i cho chúng ta biết khi doanh nghiệp cố định mức sử dụng các yếu tố khác và tăng (giảm) mức sử dụng yếu tố i thì mức sản lượng sẽ tăng (giảm) bao nhiêu đơn vị. Với ý nghĩa như trên, MP_i thường được giả thiết là dương.

- Năng suất trung bình của yếu tố i: $AP_i = \frac{F(X)}{X_i}$

- Độ co giãn của Q theo yếu tố i: ε_X^Q

- Hệ số thay thế giữa yếu tố i và yếu tố j:

$$dX_j / dX_i = -\frac{MP_j}{MP_i}$$

Trong tình huống doanh nghiệp chỉ có khả năng thay đổi được yếu tố i còn các yếu tố khác không thay đổi được (cố định) thì việc sử dụng yếu tố i ở mức có lợi nhất sẽ là ở mức mà năng suất trung bình của yếu tố i đạt cực đại. Tình huống này được gọi là tình huống tối ưu về mặt kĩ thuật. Xem xét tình huống này chúng ta có mô hình:

$$\frac{F(X)}{X_i} \rightarrow \max$$

Có thể chứng minh điều kiện cần (với nhiều dạng hàm cũng là điều kiện đủ) đối với nghiệm (X^*_i): X^*_i phải là nghiệm của phương trình:

$$\frac{F(X)}{X_i} = \frac{\partial F}{\partial X_i} \qquad (1.20)$$

Do vế trái của phương trình chính là AP_i, còn vế phải là MP_i vì vậy khi doanh nghiệp sử dụng yếu tố i ở mức mà năng suất biên của yếu tố bằng năng suất trung bình thì sẽ đạt tối ưu về mặt kĩ thuật.

+ Về mặt dài hạn, doanh nghiệp có khả năng thay đổi tất cả các yếu tố và tình huống được quan tâm là khi tất cả các yếu tố đều thay đổi theo cùng một tỉ lệ (tuyệt đối, tương đối) thì tác động này ảnh hưởng như thế nào tới sản lượng. Khi

này chúng ta đề cập tới vấn đề tăng qui mô và hiệu quả (Return to Scale).

Cho hàm sản xuất $Q = F(X_1, X_2, ..., X_n)$, với $\lambda X = (\lambda X_1, \lambda X_2, ..., \lambda X_n)$, ta nói quy mô sản xuất tăng với hệ số $\lambda (\lambda > 1)$. Nếu:

$F(\lambda X) > \lambda . F(X)$ thì công nghệ sản xuất (ứng với hàm sản xuất) gọi là tăng qui mô có hiệu quả (hiệu quả tăng theo quy mô).

$F(\lambda X) < \lambda . F(X)$ thì công nghệ sản xuất gọi là tăng qui mô không có hiệu quả (hiệu quả giảm theo quy mô).

$F(\lambda X) = \lambda . F(X)$ thì công nghệ sản xuất gọi là tăng qui mô không thay đổi hiệu quả (hiệu quả không đổi theo qui mô).

Để đo hiệu quả theo qui mô (tương đối) ta dùng độ co giãn toàn phần của Q theo các yếu tố:

$$\varepsilon^Q = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{X_i}^Q$$

Thí dụ 1.11: Xét hàm sản xuất dạng Cobb-Douglas với hai yếu tố vốn (K) và lao động (L):

$$Q = aK^{\alpha}L^{\beta}$$

Đây là hàm sản xuất có hệ số co giãn của sản lượng Q theo các biến không đổi, $\varepsilon_K^Q = \alpha$, $\varepsilon_L^Q = \beta$ và khi tăng qui mô sản xuất λ lần thì kết quả sản xuất tăng $\lambda^{\alpha+\beta}$ lần.

Như vậy đối với hàm này hiệu quả tăng (giảm, không đổi) theo quy mô khi và chỉ khi $\alpha + \beta > (<, =) 1$. Ta hãy xét năng suất biên của các yếu tố:

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = a\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} \qquad (1.21)$$

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = a\beta K^{\alpha} L^{\beta-1} \quad (1.22)$$

$$MP_K / MP_L = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{L}{K}\right) \quad (1.23)$$

+ Mô hình tối ưu về mặt kinh tế của quá trình sản xuất

Đặt vấn đề: Sử dụng các mô hình mô tả công nghệ sản xuất của doanh nghiệp để phân tích ta mới chỉ đạt được tối ưu về kĩ thuật, chưa tính tới các điều kiện bên ngoài: thị trường đầu vào. Đối với doanh nghiệp, các điều kiện liên quan đến thị trường đầu vào được thể hiện thông qua *giá của các yếu tố sản xuất*. Đây là nguồn thông tin doanh nghiệp không thể bỏ qua khi lựa chọn mức sử dụng các yếu tố. Hơn nữa, với nhiều hàm sản xuất (công nghệ) cho phép các doanh nghiệp trong chừng mực nhất định có thể sử dụng linh hoạt các yếu tố. Điều này tạo khả năng cho doanh nghiệp có thể lựa chọn nhiều tổ hợp sử dụng yếu tố theo mục đích của họ. Doanh nghiệp có thể gặp hai tình huống. Một là, với mức sản lượng dự kiến sản xuất, doanh nghiệp phải tiêu tốn một khoản chi phí để thực hiện, đương nhiên là doanh nghiệp mong muốn lựa chọn tổ hợp sử dụng các yếu tố sao cho mức *chi phí là thấp nhất* - cực tiểu hoá chi phí. Hai là, với số kinh phí đầu tư ấn định trước, doanh nghiệp muốn lựa chọn tổ hợp sử dụng các yếu tố sao cho mức *sản lượng là cao nhất* - tối đa hoá sản lượng. Các tình huống trên gọi là tình huống *tối ưu về kinh tế* vì nếu giá bán sản phẩm của doanh nghiệp không đổi, doanh nghiệp tiêu thụ được hết sản lượng thì cả hai tình huống trên đều đem lại lợi nhuận tối đa cho doanh nghiệp.

Mô hình hoá: Giả sử hàm sản xuất của doanh nghiệp là $Q = F(X_1, X_2,..., X_n)$ và giá của các yếu tố là $w_1, w_2,..., w_n$.

+ Tình huống cực tiểu hoá chi phí: Gọi Q là mức sản lượng doanh nghiệp dự kiến sản xuất. Doanh nghiệp sử dụng các yếu tố ở mức $X_1, X_2,..., X_n$ để sản xuất Q, như vậy với hàm sản xuất trên sẽ phải có điều kiện $F(X_1, X_2,..., X_n) = Q$, điều kiện này gọi là ràng buộc về sản lượng. Đồng thời doanh nghiệp sẽ phải chi một khoản là $\sum_{i=1}^{n} w_i X_i$.

Như vậy, ứng với tình huống này ta có mô hình MHIC:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i$$

với điều kiện $F(X_1, X_2,..., X_n) = Q$

trong đó biến nội sinh là $Z, X_1, X_2,..., X_n$, biến ngoại sinh là $Q, w_1, w_2,..., w_n$.

+ Tình huống tối đa hoá sản lượng: Gọi K là kinh phí doanh nghiệp dự kiến đầu tư mua các yếu tố với mức $X_1, X_2,..., X_n$ để sản xuất. Với giá các yếu tố đã cho sẽ có $\sum_{i=1}^{n} w_i X_i = K$, điều kiện này gọi là ràng buộc về chi phí. Mức sản lượng tương ứng sẽ là:

$$Q = (X_1, X_2,..., X_n).$$

ứng với tình huống này ta có mô hình MHID:

$$\text{Max } Q = F(X_1, X_2,..., X_n)$$

với điều kiện $\sum_{i=1}^{n} w_i X_i = K$

trong đó biến nội sinh là Q, X_1, X_2,..., X_n, biến ngoại sinh là K, w_1, w_2,..., w_n.

Trong cả hai tình huống, các mô hình tương ứng đều là các bài toán cực trị có ràng buộc.

Phân tích mô hình : Ta sẽ thực hiện việc phân tích mô hình MHIC, đối với mô hình MHID cách làm và kết quả hoàn toàn tương tự.

+ Giải mô hình: Lập hàm Lagrange của bài toán:

$$L(X_1, X_2,..., X_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i + \lambda (Q - F(X_1, X_2,..., X_n))$$

Xét hệ phương trình:

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = 0 \ (i = 1 \div n) \qquad (*)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \qquad (**)$$

Ký hiệu nghiệm tối ưu là X^*_i (i= $1 \div n$), khi đó điều kiện cần của tối ưu là X^*_i phải thoả mãn hệ phương trình trên. Trong thực tế, đối với nhiều dạng hàm F, điều kiện cần cũng là điều kiện đủ.

Ta có $\frac{\partial L}{\partial X_i} = w_i - \lambda \frac{\partial F}{\partial X_i} = 0 \ (i = 1 \div n)$

suy ra $\frac{w_i}{\frac{\partial F}{\partial X_i}} = \frac{w_j}{\frac{\partial F}{\partial X_j}} = \lambda$ với mọi cặp i, j ($i \neq j$). Như vậy nhóm phương trình (*) có thể viết lại:

$$\frac{w_i}{w_j} = \frac{\frac{\partial F}{\partial X_i}}{\frac{\partial F}{\partial X_j}} \text{ với mọi } i \neq j \qquad (1.24)$$

Phương trình (**) chính là điều kiện ràng buộc về sản lượng. Vế trái của (1.24) là tỷ giá của yếu tố i, j; vế phải chính là hệ số thay thế giữa hai yếu tố này. Vậy ta có thể nói, điều kiện cần của việc sử dụng tối ưu các yếu tố là ở mức mà tại đó tỉ lệ thay thế giữa các yếu tố bằng tỉ giá của chúng. Để xác định nghiệm của mô hình ta cần giải hệ phương trình gồm hệ (1.23) và ràng buộc về sản lượng. Ký hiệu trị tối ưu là TC và giá trị của nhân tử Lagrange là λ^*. Rõ ràng TC phụ thuộc vào sản lượng Q, giá các yếu tố và các tham số khác trong hàm sản xuất nên ta có thể viết $TC = TC(Q, w_1, w_2, ..., w_n)$ và được gọi là hàm tổng chi phí của doanh nghiệp ứng với mức sản lượng Q và mức giá $w_1, w_2, ..., w_n$. Nhiều khi chúng ta cố định mức giá $w_1, w_2, ..., w_n$ và chỉ xét TC như là hàm của Q.

Đối với mô hình MHID, sau khi phân tích ta cũng sẽ thu được kết quả như biểu thức (1.24).

Phân tích so sánh tĩnh: Phân tích tác động của sản lượng, giá yếu tố tới chi phí

Từ hàm tổng chi phí $TC(Q, w_1, w_2, ..., w_n)$ có thể dẫn xuất các hàm chi phí trung bình AC, chi phí biên MC:

$$AC(Q) = \frac{TC}{Q}$$

$$MC(Q) = \frac{\partial TC}{\partial Q}$$

Từ các hàm này có thể tính hệ số co giãn của tổng chi phí, chi phí trung bình, chi phí biên theo sản lượng.

Người ta đã chứng minh được rằng với $TC(Q, w_1, w_2,...,w_n)$ được xác định từ mô hình MHIC thì:

$$MC(Q) = \lambda^* \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial TC}{\partial p_i} = X_i^* \text{ với } i = 1 \div n \tag{1.26}$$

Từ (1.24) ta thấy nếu tất cả giá yếu tố đều biến động theo cùng tỉ lệ, thì hệ (1.24) không đổi do đó X_i^* sẽ không đổi.

Thí dụ 1.12: Hàm sản xuất của doanh nghiệp có dạng $Q=25K^{0.5}L^{0.5}$ trong đó Q: sản lượng, K: vốn, L: Lao động. Cho giá vốn $p_K = 12$, giá lao động $p_L = 3$.

a. Tính mức sử dụng K, L để sản xuất sản lượng $Q = Q_0 = 1250$ với chi phí nhỏ nhất.

b. Tính hệ số co giãn của tổng chi phí theo sản lượng tại Q_0.

c. Nếu giá vốn và lao động đều tăng 10% với mức sản lượng như trước, mức sử dụng vốn, lao động tối ưu sẽ thay đổi như thế nào?

d. Phân tích tác động của giá vốn, lao động tới tổng chi phí.

Giải: Theo mô hình MHIC ta có bài toán:

$$\text{Min } (12K + 3L)$$

Với điều kiện $25K^{0.5}L^{0.5} = 1250$

a. Nghiệm tối ưu, K^*, L^*, là nghiệm của hệ phương trình:

$$MP_K / MP_L = p_K/p_L$$

$$25K^{0,5}L^{0,5} = 1250$$

Sử dụng (1.23) với $\alpha = 0,5$; $\beta = 0,5$

ta có: $MP_K/ MP_L = (0,5/0,5)\ (L/K) = p_K/p_L = 4$, suy ra $L = 4K$.

Thay $L = 4K$ vào ràng buộc sản lượng ta được $50K = 1250$. Kết quả là $K^* = 25$, $L^* = 100$.

b. Ta có thể tính được mức chi phí thấp nhất $TC(Q_0) = 600$ do đó $AC(Q_0) = 600/1250 = 0,48$.

Theo (1.25), $MC(Q_0) = \lambda^* = \dfrac{p_L}{MP_L(K^*, L^*)}$

$= 3/12,5(K^*)^{0,5}(L^*)^{-0,5} = 6/12,5.$

Hệ số co giãn của tổng chi phí theo sản lượng tại Q_0 theo công thức (1.12) sẽ là $\varepsilon_Q^{TC} = \dfrac{MC(Q_0)}{AC(Q_0)} = 6/(12,5 \times 0,48) = 1.$

c. Vì giá các yếu tố đều tăng cùng tỉ lệ nên K^*, L^* không đổi.

d. Theo (1.26), ta có $\dfrac{\partial TC}{\partial p_K} = K^* = 25 > 0, \dfrac{\partial TC}{\partial p_L} = L^* = 100 > 0$

nên khi giá vốn, lao động tăng thì chi phí sẽ tăng.

+ Mô hình tối đa hoá lợi nhuận của doanh nghiệp

Đặt vấn đề: Như chúng ta đã biết, mục tiêu của doanh nghiệp là lợi nhuận tối đa. Để đạt mục tiêu này, doanh nghiệp phải xử lý quan hệ giữa doanh nghiệp - thị trường đầu vào và doanh nghiệp - thị trường đầu ra. Doanh nghiệp phải biết kết hợp giữa tối ưu về kĩ thuật, về kinh tế với các điều kiện trong thị trường đầu ra. Các điều kiện này bao gồm:

- Vị thế của doanh nghiệp trên thị trường (thị phần của doanh nghiệp)

- Sự hình thành giá bán sản phẩm của doanh nghiệp.

Doanh nghiệm sẽ tính toán mức cung sản phẩm cho thị trường và giá bán để tối đa hoá lợi nhuận. Với ý nghĩa đó người ta gọi mô hình này là mô hình xác định mức cung. Tuỳ thuộc vào vị trí thế của doanh nghiệp trên thị trường đầu ra sẽ có cách tính khác nhau. Ta sẽ xét hai loại hình doanh nghiệp: cạnh tranh hoàn hảo và độc quyền.

Mô hình hoá: Kí hiệu TR(Q) là doanh thu khi doanh nghiệp cung ứng và tiêu thụ trên thị trường mức sản lượng Q. Ta có các định nghĩa doanh thu biên (MR) và doanh thu trung bình (AR) sau đây:

$$MR(Q) = \frac{dTR}{dQ}$$

$$AR(Q) = \frac{TR}{Q}$$

Gọi TC (Q) là chi phí tương ứng với Q (có tính tới tối ưu về kinh tế), lợi nhuận sẽ là:

$$\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$$

Để xác định mức sản lượng làm tối đa hoá lợi nhuận (mức cung) của doanh nghiệp ta có mô hình:

$$\text{Max } \pi(Q) \qquad (1.27)$$

mô hình có biến nội sinh là Q, π; biến ngoại sinh là các biến ngoại sinh (khác Q) có mặt trong các hàm TR và TC.

Phân tích mô hình

+ Giải mô hình:

Điều kiện cần của tối ưu là: $$\frac{dTR}{dQ} = \frac{dTC}{dQ} \qquad (1.28)$$

Như vậy điều kiện cần để mức sản lượng làm tối đa hoá lợi nhuận là tại mức này doanh thu biên bằng chi phí biên.

+ Trường hợp doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo: doanh nghiệp là người chấp nhận giá nên giá bán sản phẩm (p) là biến ngoại sinh và p không đổi theo mức cung của doanh nghiệp. Doanh nghiệp căn cứ vào hàm sản xuất, hàm chi phí và giá p để xác định mức cung tối đa hoá lợi nhuận. Ta có TR(Q) = p Q nên mô hình (1.27) chỉ có một biến nội sinh là Q. Do MR = p, vì vậy (1.28) sẽ là:

$$p = MC(Q) \qquad (1.29)$$

tức là đối với doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo, họ sẽ chọn sản lượng đem cung ứng cho thị trường ở mức mà chi phí biên bằng giá bán. Phương trình (1.29) thể hiện giữa mức cung của doanh nghiệp và giá bán trên thị trường nhưng dưới dạng hàm ngược.

+ Trường hợp doanh nghiệp độc quyền: Do không có sản phẩm cạnh tranh thay thế nên doanh nghiệp có toàn quyền quy định giá bán và mức cung để tối đa hoá lợi nhuận và mức cầu của thị trường bằng mức cung của doanh nghiệp. Như vậy giá bán sản phẩm của doanh nghiệp phụ thuộc vào mức cung của doanh nghiệp, tức là p = p(Q); trong trường hợp này mô hình (1.27) có hai biến nội sinh p và Q.

Thông thường p là hàm nghịch biến của Q nên có tồn tại hàm ngược Q = Q(p). Thực chất, cả hai hàm p = p(Q) và Q = Q(p) đều thể hiện cùng một mối quan hệ, đó là quan hệ giữa giá và mức cầu của thị trường. Nếu biểu diễn quan hệ này bằng hàm Q = Q(p) thì hàm này gọi là hàm cầu (xuôi), ý

nghĩa của nó là: nếu doanh nghiệp độc quyền định giá là p thì mức cầu của thị trường (cũng là mức cung của doanh nghiệp) sẽ là Q(p). Nếu biểu diễn quan hệ này bằng hàm p = p(Q) thì hàm này gọi là hàm cầu (ngược), ý nghĩa của nó là: nếu doanh nghiệp độc quyền cung ứng cho thị trường mức Q thì phải định giá là p thì mới cân bằng mức cầu của thị trường. Khi xét doanh nghiệp độc quyền, hàm cầu của thị trường thường được cho dưới dạng hàm cầu ngược. Với hàm cầu ngược. TR = p(Q)Q nên MR= $p(Q) + \frac{dp}{dQ}Q$ do đó (1.28) trở thành:

$$p(Q) + \frac{dp}{dQ}Q = MC(Q) \qquad (1.30)$$

Để giải mô hình - xác định mức cung làm tối đa hoá lợi nhuận - ta cần giải phương trình (1.28) hoặc các biến thể của nó (1.29), (1.30) và có thể cần kiểm tra điều kiện đủ của nghiệm.

+ Phân tích so sánh tĩnh: Ký hiệu Q^*, π^* là mức sản lượng tối đa hoá lợi nhuận và mức lợi nhuận tối đa. Rõ ràng Q^*, π^* phụ thuộc các biến ngoại sinh có trong mô hình (1.27) và chúng được gọi là hàm cung, hàm lợi nhuận của doanh nghiệp. Để phân tích tác động của biến ngoại sinh tới Q^*, π^* ta có thể sử dụng công thức tính đạo của hàm ẩn vì có thể coi (1.28) như phương trình hàm ẩn. Người ta đã chứng minh được rằng:

+ Đối với doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo ta sẽ có:

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial p} = Q^* \qquad (1.31)$$

Thí dụ 1.13:

Một doanh nghiệp có hàm tổng doanh thu $TR = 58Q - 0{,}5Q^2$ và hàm tổng chi phí $TC = 1/3Q^3 - 8{,}5Q^2 + 97Q + FC$ trong đó Q là sản lượng và FC là chi phí cố định.

a. Với FC = 4, hãy xác định mức sản lượng tối đa hoá lợi.

b. Hãy phân tích tác động của chi phí cố định FC tới mức sản lượng tối đa hóa lợi nhuận và mức lợi nhuận tối đa.

Giải: a. Ta có $MR = 58 - Q$, $MC = Q^2 - 17Q + 97$, theo (1.26) ta có:

$$58 - Q = Q^2 - 17Q + 97 \qquad (i)$$

Giải phương trình bậc 2 đối với Q ta được 2 nghiệm là 3 và 13. Thử vào điều kiện đủ của tối ưu ta được $Q^* = 13$.

b. Chi phí cố định FC không có mặt trong (i) nên Q^* không phụ thuộc FC.

Do $\pi^* = TR(Q^*) + 1/3\ Q^{*3} + 8{,}5Q^{*2} - 97Q^* - FC$ nên $\frac{d\pi^*}{dFC} = -1 < 0$ do đó FC tác động ngược chiều tới mức lợi nhuận tối đa.

Thí dụ 1.14: Một doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo có hàm chi phí biên $MC = 2Q^2 - 12Q + 25$, chi phí cố định FC và giá bán sản phẩm p.

a. Hãy xác định hàm tổng chi phí TC với FC = 20. Với b = 39 hãy xác định mức sản lượng và mức lợi nhuận tối ưu.

b. Nếu giá p tăng 10% thì mức sản lượng, lợi nhuận tối ưu sẽ biến động như thế nào?

Giải:

a. Ta có $TC = \int MC dQ + FC = 2/3Q^3 - 6Q^2 + 25Q + 20$.

Theo (1.29) ta có $p = 2Q^2 - 12Q + 25$ (ii)

Giải phương trình trên với p = 39, loại bỏ nghiệm âm, kiểm tra điều kiện đủ của tối ưu ta được $Q^* = 7$ và $\pi^* \approx 143,3$

b. Trước hết ta cần tính hệ số co giãn của Q^* và π^* theo giá p. Để tính $\frac{dQ^*}{dp}$ ta có thể áp dụng công thức tính đạo hàm hàm ẩn vì Q^* là nghiệm của (ii). Ta có thể viết:

$$p - 2Q^{*2} + 12Q^* - 25 = 0$$

Gọi biểu thức ở vế trái là $F(p,Q^*)$, suy ra:

$$\frac{dQ^*}{dp} = \frac{\frac{\partial F}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial Q^*}} = -\frac{1}{-4Q^* + 12} = \frac{1}{4Q^* - 12}$$

Như vậy $\varepsilon_p^{Q^*} = \frac{dQ^*}{dp}\frac{p}{Q^*} = \frac{p}{(4Q^* - 12)Q^*}$, thay p = 39, Q^* = 7 ta tính được:

$$\varepsilon_p^{Q^*} \approx 3,48.$$

Theo (1.31) ta có $\frac{\partial \pi^*}{\partial p} = Q^* = 7$

suy ra $\varepsilon_p^{\pi^*} = \frac{d\pi^*}{dp}\frac{p}{\pi^*} = (7 \times 39)/143,3 \approx 1,9.$

Như vậy nếu giá p tăng 1% thì mức sản lượng tối ưu tăng 0,348% và lợi nhuận tăng 1,9% do đó nếu giá p tăng 10% thì mức sản lượng sẽ tăng ≈3,48% và lợi nhuận tăng 19%.

Thí dụ 1.15: Một công ty cạnh tranh hoàn hảo có hàm tổng chi phí $TC = Q^3 - Q^2 + 1$ với $Q \geq 1$.

a. Với giá thị trường là p, hãy viết phương trình xác định hàm cung của công ty.

b. Hãy phân tích tác động của giá p tới mức cung tối đa hoá lợi nhuận và tới mức lợi nhuận tối đa của công ty.

Giải: a. Theo (1.29) ta có phương trình xác định hàm cung:

$$P = 3Q^2 - 2Q.$$

b. Ta phải tìm $\frac{dQ^*}{dp}$ và $\frac{d\pi^*}{dp}$. Áp dụng cách tính đạo hàm hàm ẩn đối với phương trình trong câu a, ta có $\frac{dQ^*}{dp} = \frac{1}{6Q^* - 2}$. Với $Q^* \geq 1$, hiển nhiên $\frac{dQ^*}{dp} > 0$.

Mặt khác ta có $\frac{d\pi^*}{dp} = Q^* > 0$. Vậy khi giá p tăng thì mức cung và lợi nhuận của doanh nghiệp đều tăng.

Thí dụ 1.16:

Doanh nghiệp độc quyền có hàm cầu (ngược): $p = 490 - 2Q$ và hàm tổng chi phí: $TC = 0{,}5Q^2AD^{0.5}$ trong đó Q là sản lượng và AD là chi phí quảng cáo.

a. Với AD = 9, hãy xác định mức sản lượng và giá bán tối ưu.

b. Hãy phân tích tác động của chi phí quảng cáo AD tới mức sản lượng và giá bán tối ưu.

Giải: a. Ta có $MC = QAD^{0.5}$, với AD = 9, theo (1.30) suy ra:

$$490 - 2Q + (-2)Q = QAD^{0.5} = 3Q \qquad \text{(iii)}$$

Giải phương trình trên và kiểm tra điều kiện đủ của tối ưu ta được $Q^* = 70$, thay vào hàm cầu ta có $p^* = 350$.

b. Để phân tích tác động của AD tới Q^* ta cần tính $\frac{dQ^*}{dAD}$.

Áp dụng cách tính đạo hàm của hàm ẩn đối với (iii), kết quả là $\frac{dQ^*}{dAD} = \frac{0.5Q^*AD^{-0.5}}{4 + AD^{0.5}}$. Do AD >0, $Q^* > 0$ nên $\frac{dQ^*}{dAD} < 0$.

Vì $p^* = 490 - 2Q^*$, theo công thức tính đạo hàm hàm hợp ta có $\frac{dp^*}{dAD} = \frac{dp^*}{dQ^*}\frac{dQ^*}{dAD}$. Do $\frac{dQ^*}{dAD} < 0$ và $\frac{dp^*}{dQ^*} = -2$ (vì $p^* = 490 - 2Q^*$) nên $\frac{dp^*}{dAD} < 0$. Như vậy nếu chi phí quảng cáo tăng lên thì doanh nghiệp sẽ bán được ít hàng hơn nhưng với giá cao hơn. Với AD = 9, $Q^* = 70$ thay vào các biểu thức $\frac{dQ^*}{dAD}$ và $\frac{dp^*}{dAD}$ ta có thể tính được khi tăng một đơn vị chi phí quảng cáo, Q^* sẽ giảm và p^* sẽ tăng bao nhiêu đơn vị. Khi đã có mức biến động tuyệt đối, ta hoàn toàn có thể xét tới biến động tương đối. Các tính toán chi tiết này người đọc có thể xem như bài tập.

Thí dụ 1.17: Trong thí dụ này ta sẽ kết hợp điều kiện tối ưu về kinh tế và tối đa hoá lợi nhuận của doanh nghiệp. Giả sử doanh nghiệp có hàm sản xuất Q = F(K, L) trong đo K: vốn, L: lao động; giá vốn là p_K, giá lao động là p_L; giá bán sản phẩm của doanh nghiệp là p. Hãy xác định mức sử dụng vốn và lao động để đạt lợi nhuận cao nhất.

+ Đối với doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo ta có bài toán:

$\pi = pQ - (p_K K + p_L L) = pF(K,L) - (p_K K + p_L L) \Rightarrow Max$

+ Đối với doanh nghiệp độc quyền, bài toán sẽ có dạng:

$\pi = p(Q)Q - (p_K K + p_L L) = p(F(K,L))F(K,L) - (p_K K + p_L L)$
$\Rightarrow Max$

Giải: Đây là bài toán cực trị 2 biến, không ràng buộc. Xác định điều kiện cần của tối ưu (với nhiều dạng hàm sản xuất, điều kiện này cũng là điều kiện đủ):

Trường hợp doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo:

$$MP_K p = p_K,\ MP_L p = p_L \qquad (*)$$

Trường hợp doanh nghiệp độc quyền:

$$p(F(K,L))MP_K = p_K,\ p(F(K,L))MP_L = p_L. \qquad (**)$$

Giải hệ phương trình này ta được K^*, L^* thay vào hàm sản xuất sẽ tính được Q^* và do đó tính được π^*.

Phân tích so sánh tĩnh: Người ta đã chứng minh được rằng:

+ Đối với cả hai loại doanh nghiệp ta luôn có:

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial p_K} = -K^* \text{ và } \frac{\partial \pi^*}{\partial p_L} = -L^* \qquad (1.32)$$

+ Đối với doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo ta sẽ có:

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial p} = Q^* \qquad (1.33)$$

Thí dụ minh hoạ bằng số: Một doanh nghiệp cạnh tranh hoàn hảo có hàm sản xuất $Q = K^{0.5} + L^{0.5}$ với $p_K = 6$, $p_L = 4$, $p = 2$.

a. Hãy xác định mức sử dụng vốn, lao động tối ưu.

b. Hãy phân tích tác động của giá vốn, lao động tới mức lợi nhuận tối đa.

Giải: a. Ta có $MP_K = 0,5K^{-0,5}$, $MP_L = 0,5L^{-0,5}$

theo (*) suy ra: $K^{-0,5} = 6$; $L^{-0,5} = 4$ do đó $K^* = 1/36$, $L^* = 1/16$.

b. Theo (1.32), $\frac{d\pi^*}{dp_K} = -K^* = -1/36 < 0$,

$$\frac{d\pi^*}{dp_L} = -L^* = -1/16 < 0$$

nên khi giá vốn, lao động tăng, lợi nhuận của doanh nghiệp sẽ giảm.

Tổng cộng mức cung của tất cả các doanh nghiệp hoạt động trên thị trường ta được mức cung của thị trường, kí hiệu là S. Vì mức cung của mỗi doanh nghiệp phụ thuộc vào giá p và các yếu tố khác liên quan tới thị trường yếu tố sản xuất, công nghệ nên S cũng sẽ phụ thuộc vào các nhân tố này, tức là S = S(p; a, b, c...), a, b, c... là các tham số đặc trưng cho các yếu tố khác có thể ảnh hưởng tới S.

b. Mô hình phân tích hành vi tiêu dùng

Tác nhân hoạt động trên lĩnh vực tiêu thụ hàng hoá gọi là người tiêu dùng. Trong trường hợp hàng hoá là sản phẩm cuối cùng thì người tiêu dùng được gọi là hộ gia đình. Trong phạm vi mô học, chúng ta sẽ đề cập tới hành vi của hộ gia đình. Hành vi của các hộ gia đình trên thị trường hàng hoá là cách thức họ mua sắm, tiêu thụ các loại hàng hoá, từ đó hình thành mức cầu các loại hàng hoá của hộ gia đình. Hộ

gia đình quyết định chọn loại hàng nào, mua với khối lượng bao nhiêu phụ thuộc vào:

- Thị hiếu, sở thích

- Thu nhập đem chi tiêu mua hàng hoá (ngân sách của hộ gia đình)

- Giá cả của hàng hoá

- Mục đích tiêu dùng.

Để phân tích hành vi của hộ gia đình chúng ta sẽ sử dụng một số mô hình đề cập tới các yếu tố này.

+ Mô hình hàm thoả dụng:

• Mô hình hoá thị hiếu, sở thích của hộ gia đình:

Hộ gia đình mua và tiêu thụ hàng nhằm thoả mãn đòi hỏi về tâm lí, sinh lí, thể chất và tinh thần. Những đòi hỏi này và một số yếu tố khác như dân tộc, địa lí, tôn giáo, truyền thống, thói quen, giới tính, tuổi tác... chi phối sự hình thành sở thích, thị hiếu. Giả sử hộ gia đình có thể mua và tiêu thụ m loại hàng hoá. Kí hiệu X_i là khối lượng hàng thứ i họ dự kiến mua, khi đó vectơ:

$$X = (X_1, X_2, ..., X_m)$$

gọi là một gói hàng (giỏ hàng). Mục đích của hộ gia đình là đáp ứng các đòi hỏi trên ở mức cao nhất có thể được. Để thể hiện mức độ đáp ứng, mức độ thoả mãn và nhu cầu khi tiêu thụ gói hàng X, chúng ta sử dụng hàm thoả dụng (hàm hữu dụng, hàm tiện ích, hàm lợi ích) kí hiệu là U. Như vậy:

$$U(X)=U(X_1, X_2, ..., X_m, a, b, c...)$$

Dạng hàm U và các tham số a, b, c... biểu thị sở thích, thị hiếu.

• *Phân tích mô hình:*

Từ hàm U(X) chúng ta có thể tính:

Độ thoả dụng biên của hàng hoá i: $MU = \frac{\partial U}{\partial X_i}$. các hàm MU_i thường được giả thiết là dương.

Hệ số thay thế giữa loại hàng i bằng hàng j: MU_j / MU_i

+ Mô hình tối đa hoá thoả dụng – mô hình xác định mức cầu các loại hàng hoá của hộ gia đình:

Đặt vấn đề: Với giá cả các loại hàng hoá và ngân sách tiêu dùng cho trước, hộ gia đình cần quyết định chọn mua loại hàng nào, khối lượng bao nhiêu sao cho số chi tiêu không quá ngân sách tiêu dùng nhưng phải đáp ứng tốt nhất sở thích.

Mô hình hoá: Kí hiệu M là ngân sách tiêu dùng, $p_1,...,p_m$ là giá các loại hàng và U(X) là hàm thoả dụng của hộ gia đình. Khi hộ gia đình dự kiến mua giỏ hàng $X = (X_1, X_2,..., X_m)$ thì sẽ đạt mức thoả dụng là U(X) và cần chi tiêu một khoản $\sum_{i=1}^{n} p_i X_i$. Từ các yêu cầu ở trên ta có mô hình:

$$\text{Max } Z = U(X)$$

với điều kiện $\sum_{i=1}^{n} p_i X_i = M$

Điều kiện trên gọi là ràng buộc về ngân sách tiêu dùng. Mô hình có Z, $X_1, X_2,...,X_m$ là các biến nội sinh, M, $p_1, p_2,..., p_m$ là biến ngoại sinh.

Phân tích mô hình:

Bằng cách phân tích tương tự như đối với mô hình

MHIC, ta có kết quả: điều kiện cần của tối ưu (đối với nhiều dạng hàm U cũng là điều kiện đủ) là nghiệm của mô hình phải thoả mãn hệ phương trình:

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{\frac{\partial U}{\partial X_i}}{\frac{\partial U}{\partial X_j}} \text{ với mọi } i \neq j \qquad (1.34)$$

Như vậy với ngân sách và mặt bằng giá p_1, p_2,... p_m cho trước, hộ gia đình muốn tối đa hoá độ thoả dụng thì cần mua và tiêu thu các loại hàng ở mức hệ số thay thế các loại hàng phải bằng tỉ giá. Để xác định mức cầu các hàng hoá ta cần giải hệ phương trình gồm hệ (1.34) và ràng buộc ngân sách tiêu dùng.

Trị tối ưu và nghiệm của mô hình sẽ phụ thuộc vào giá p,..., p, thu nhập M và U. Nếu U cố định (sở thích cố định), khi đó các thành phần X^*_i của nghiệm sẽ xác định mức cầu (hàm cầu) loại hàng i của hộ gia đình. Ta có thể viết:

$$X^*_i = X^*_i (p_1, p_2, \ldots p_m, M) \; i = 1, \ldots, m$$

Các hàm cầu trên (phụ thuộc vào giá, thu nhập) gọi là hàm cầu Marshall, chúng thể hiện mức cầu hàng hoá trên thị trường mà chúng ta có thể quan sát và đo lường được.

Thí dụ 1.18: Hàm thoả dụng của hộ gia đình khi tiêu dùng hàng hoá A, B có dạng: $U = 40\, X_A^{0.25} X_B^{0.5}$ trong đó X_A, X_B là mức tiêu dùng hàng A, B. Giá hàng được cho như sau $p_A = 4$, $p_B = 10$.

a. Có ý kiến cho rằng hàng hoá A luôn có thể thay thế hàng hoá B và tỉ lệ thay thế là 1:1. Hãy nhận xét ý kiến này.

b. Hãy xác định mức cầu hàng hoá A, B của hộ giá đình nếu thu nhập là 600.

Giải: a. ta phải tính hệ số thay thế giữa hai hàng hoá MU_A/MU_B. Ta có:

$$MU_A = 10\ X_A^{-0.75}X_B^{0.5} \text{ và } MU_B = 20\ X_A^{0.25}X_B^{-0.5}$$

Như vậy $MU_A/MU_B/2X_A > 0$ do đó hai hàng hoá này luôn thay thế được cho nhau. Cũng theo kết quả này, để thay thế 1 đơn vị hàng A cần $X_B/2X_A$ đơn vị hàng B, tỷ số $X_B/2X_A$ không nhất thiết bằng 1 do đó ý kiến cho rằng tỉ lệ thay thế là 1:1 là không đúng.

b. Ta có hệ phương trình xác định mức tiêu dùng tối ưu:

$$MU_A /MU_B = p_A /p_B$$
$$4X_A + 10X_B = 600$$

Từ câu a ta biết $MU_A/MU_B = X_B/2X_A$ nên hệ phương trình trở thành:

$$X_B/2X_A = 2/5$$
$$4X_A + 10X_B = 600$$

Giải hệ trên ta được $X^*_A = 40$ và $X_B^* = 40$.

Tổng cộng mức cầu hàng hoá của các hộ gia đình ta được mức cầu (hàm cầu) của thị trường, kí hiệu là D. Khi đó $D = D(p_1,..., p_m M)$ với M khi này là tổng ngân sách tiêu dùng của tất cả các hộ gia đình.

2. Mô hình cân bằng thị trường

a. Mô hình cân bằng một thị trường - mô hình cân bằng riêng

Đặt vấn đề: Như chúng ta đã làm quen trong thí dụ 1.1,

những vấn đề liên quan tới hoạt động của thị trường hàng hoá thu hút sự quan tâm chẳng những của các doanh nghiệp, người tiêu dùng mà còn của Nhà nước. Điều này càng trở nên quan trọng khi hoạt động của thị trường cần "bàn tay hữu hình" điều tiết. Vấn đề thường đặt ra là trong quá trình hoạt động của thị trường, giá và lượng hàng hoá lưu thông được xác định như thế nào, những yếu tố nào có thể ảnh hưởng tới quá trình này và tác động của chúng ở mức độ nào. Giải đáp được vấn đề này, đối với doanh nghiệp và người tiêu dùng sẽ có điều chỉnh thích hợp trong hành vi để theo đuổi mục tiêu; đối với nhà nước sẽ có căn cứ và cách thức điều tiết thị trường theo định hướng mong muốn. Chúng ta có thể mô hình hoá thị trường cùng sự hoạt động của nó bằng mô hình dưới đây.

Mô hình hoá: Mô tả cung - cầu: mô hình hàm cung, hàm cầu của thị trường:

Thị trường bao gồm tác nhân tham gia vào lực lượng cung, cầu hình thành cung, cầu liên hệ với nhau bởi giá trong quá trình mua bán trao đổi.

Trong các mô hình phân tích hành vi sản xuất, tiêu dùng chúng ta đã mô tả sự hình thành cung, cầu của các tác nhân và của toàn bộ lực lượng cung, cầu. Ta có thể sử dụng hàm cung, cầu (tổng hợp) để mô tả lực lượng cung, cầu trên thị trường.

+ Hàm cung của thị trường: Giả sử hàm cung $S = S(p, a, b,...)$ trong đó p là giá hàng, a, b... là các biến ngoại sinh.

+ Hàm cầu của thị trường: Nhu cầu của người tiêu dùng về một loại hàng phụ thuộc giá cả và thu nhập là mô hình sử dụng phổ biến. Hàm cầu của thị trường về một loại hàng: $D = D(p, p_i, M, \alpha, \beta...)$

trong đó M là thu nhập, p là giá hàng hoá ta xem xét, p_i là giá các hàng hoá khác có liên quan, α, β... là các biến ngoại sinh khác.

Theo qui luật cung cầu, giả thiết thường được nêu ra là $\frac{\partial S}{\partial p} > 0$ $\frac{\partial D}{\partial p} < 0$. Các giả thiết khác liên quan tới các biến ngoại sinh sẽ tuỳ thuộc vào nội dung kinh tế của chúng. Với giả thiết này các hàm S, D có tồn tại hàm ngược. Trong nhiều trường hợp hàm cung, cầu được cho dưới dạng hàm ngược.

$p_S = p(S, a, b...)$ và gọi là giá cung (mức giá người sản xuất yêu cầu để cung khối lượng S)

$p_D = p(D, p_i, M, \alpha, \beta...)$ và gọi là giá cầu (mức giá người tiêu dùng trả để mua khối lượng D).

Phân tích so sánh tĩnh: Sử dụng các đạo hàm riêng của D ta có thể xem xét ảnh hưởng (tuyệt đối, tương đối) của giá, của thu nhập đến mức cầu của thị trường.

+ Phân tích quan hệ mức cầu - thu nhập:

Nếu tất cả giá p_i đều cố định, khi đó mức cầu chỉ phụ thuộc vào thu nhập M (thu nhập danh nghĩa và thu nhập thực tế không có sự khác biệt vì tất cả giá đều cố định), tức là:

$$D = D(M)$$

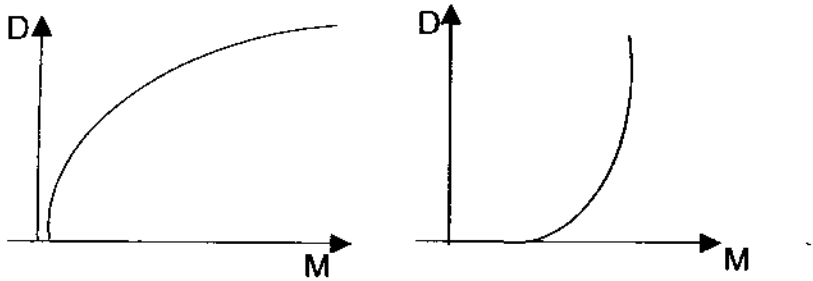
Đồ thị của hàm trên gọi là đường cong Engel. Xu thế của các đường Engel thể hiện quan hệ giữa mức cầu và thu nhập.

Nếu $dD/dM > 0$ thì hàng hoá gọi là hàng hoá bình thường (hàng thông thường, hàng cấp cao), nếu $dD/dM < 0$ gọi là hàng cấp thấp.

Đối với hàng bình thường, khi thu nhập tăng, các hàng hoá khác nhau sẽ tăng với nhịp độ khác nhau. Có loại hàng tăng ngày càng chậm, thậm chí đến một ngưỡng thu nhập nào đó sẽ bão hoá, tức là $d^2D/dM^2 < 0$. Những loại hàng này gọi là hàng thiết yếu. Với các mặt hàng thiết yếu nhu cầu bão hoà khi thu nhập quá cao.

Nếu $d^2D/dM^2 > 0$ thì gọi là hàng xa xỉ. Với những mặt hàng xa xỉ nhu cầu tăng gần như không giới hạn khi thu nhập tăng.

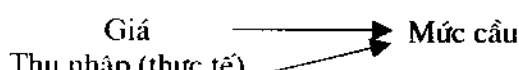
Đường cong Engel ứng với hàng thiết yếu và hàng xa xỉ:



Hàng thiết yếu
Hàng xa xỉ

Phân tích quan hệ mức cầu - giá cả:

Với thu nhập danh nghĩa bằng tiền cố định, khi giá hàng biến động (thí dụ tăng lên) sẽ ảnh hưởng chẳng những đến mức cầu mà cả thu nhập thực tế. Do đó chúng ta có sơ đồ kênh liên hệ:



Khi này hàm cầu có dạng:

$$D = D\,[p,\ p_i,\ M\ (p,\ p_i)]$$

- Phân tích ảnh hưởng của giá:

Để phân tích ảnh hưởng của sự biến động giá p đến mức cầu D (các giá khác không đổi) ta tính dD/dp. Theo công thức tính đạo hàm hàm hợp ta có:

$$\frac{dD}{dp} = \frac{\partial D}{\partial p} + \frac{\partial D}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial p}$$

Như vậy ảnh hưởng của việc giá hàng p tăng lên vừa trực tiếp, vừa gián tiếp. Ảnh hưởng trực tiếp làm cho người tiêu dùng phải tìm hàng hoá khác thay thế do đó làm *giảm mức cầu*, đó là ảnh hưởng (hiệu ứng) thay thế và thể hiện bởi $\frac{\partial D}{\partial p}(<0)$. Ảnh hưởng gián tiếp làm *giảm thu nhập thực tế* của người tiêu dùng, đó là ảnh hưởng (hiệu ứng) thu nhập và thể hiện bởi số hạng thứ hai bên vế phải (với $\frac{\partial M}{\partial p}(<0)$. Ảnh hưởng tổng cộng còn tuỳ thuộc vào dấu và độ lớn của $\frac{\partial D}{\partial M}$.

Nếu hàng hoá đang xét là hàng hoá bình thường ($\frac{\partial D}{\partial M} > 0$), khi đó sự tăng giá p làm giảm mức cầu D vì khi này $dD/dp < 0$.

Nếu p tăng mà D tăng thì hàng hoá này phải là là hàng cấp thấp ($\frac{\partial D}{\partial M} < 0$). Từ đây chúng ta có thể thấy hàng hoá Giffen- hàng hoá mà khi giá tăng mức cầu tăng - là hàng cấp thấp.

- Phân tích ảnh hưởng chéo của giá:

Để đo lường ảnh hưởng của sự biến động giá hàng hoá i tới mức cầu hàng hoá đang xét ta tính:

$$\frac{dD}{dp_i} = \frac{\partial D}{\partial p_i} + \frac{\partial D}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial p_i}$$

Nếu $dD/dp_i > 0$ thì hàng đang xét và hàng i gọi là hai mặt hàng thay thế, nếu $dD/dp_i < 0$ thì gọi là hai mặt hàng bổ sung.

+ Mô hình cân bằng thị trường riêng

Khi nghiên cứu mô hình hàm cung, hàm cầu hàng hoá của thị trường ta thấy yếu tố giá hàng hoá có liên quan tới cả hai hàm này và giá được xem là biến ngoại sinh. Nếu chúng ta quan tâm tới sự hình thành giá cả trên thị trường thì phải coi giá cả là biến nội sinh. Với tư cách là biến nội sinh, giá cả trước hết phụ thuộc vào quan hệ cung - cầu hiện diện trên thị trường, ngoài ra nó phụ thuộc vào cấu trúc của thị trường (cạnh tranh hoàn hảo, cạnh tranh không hoàn hảo, độc quyền) và sự can thiệp của Nhà nước. Trong phạm vi môn học, chúng ta chỉ đề cập tới sự hình thành giá cả liên quan tới quan hệ cung - cầu trên thị trường cạnh tranh hoàn hảo. Các yếu tố khác có thể ảnh hưởng tới sự hình thành giá cả được xem là các biến ngoại sinh. Mô hình được sư dụng để phân tích là mô hình cân bằng thị trường. Đây là lớp mô hình được sử dụng trong nhiều lĩnh vực kinh tế - xã hội khác nhau (giá cả, sản xuất - tiêu dùng, lao động - việc làm).

+ Mô hình:

Hàm cung: $S = S(p, a, b,...)$; $\partial S/\partial p > 0$

Hàm cầu: $D = D(p, \alpha, \beta...)$; $\partial D/\partial p < 0$

Điều kiện cân bằng thị trường: S = D

với p là giá hàng hoá, a, b, α, β... là các biến ngoại sinh.

+ Phân tích mô hình:

- Tìm nghiệm của mô hình: Giải phương trình cân bằng trên chúng ta sẽ xác định được giá cân bằng $\bar{p}$ và do đó xác định được lượng cân bằng $\bar{Q}$. Rõ ràng cả $\bar{p}$ và $\bar{Q}$ đều phụ thuộc vào các biến ngoại sinh có trong S và D.

- Phân tích tác động của các biến ngoại sinh tới giá và lượng cân bằng:

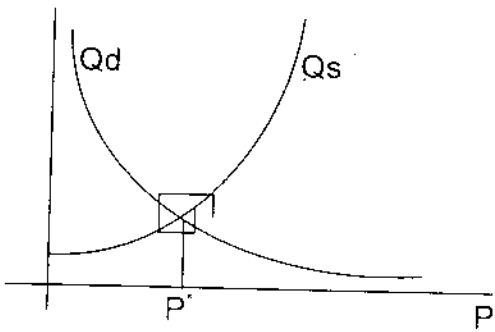
Nếu chúng ta có các biểu thức tường minh xác định chúng thì để nghiên cứu ảnh hưởng của các biến ngoại sinh, ta chỉ cần lấy đạo hàm riêng theo các biến này.

Nếu chúng ta không biết dạng tường minh của $\bar{Q}$ và $\bar{p}$ thì ta phải tính các đạo hàm riêng theo biến ngoại sinh từ phương trình cân bằng và theo công thức tính đạo hàm của hàm ẩn. Thí dụ: Ta xét ảnh hưởng của biến ngoại sinh a tới giá cân bằng. Phương trình cân bằng có thể viết dưới dạng S – D = 0, đây là phương trình xác định hàm ẩn $\bar{p}$ theo a, b, α, β..., theo công thức tính đạo hàm của ẩn ta có:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial a} = \frac{\dfrac{\partial \bar{S}}{\partial a}}{\dfrac{\partial D}{\partial p} - \dfrac{\partial S}{\partial p}} \qquad (1.35)$$

các đạo hàm riêng ở vế phải được tính tại $p = \bar{p}$

Trong trường hợp quan hệ cung - cầu hiện diện trên thị trường không cân bằng thì cơ chế giá sẽ hoạt động và đưa quan hệ về trạng thái cân bằng. Ta có thể minh hoạ tình huống này bằng sơ đồ mạng nhện dưới đây:



Thí dụ 1.19: Giả sử hàm cung, hàm cầu có dạng

$S = -a + bp$ $\quad a,b > 0$

$D = \alpha - \beta p$ $\quad \alpha,\beta > 0$

Ta có thể giải thích ý nghĩa của các hệ số a, b, α, β như sau:

Cho S = 0 (không có cung trên thị trường), suy ra p = a/b. Như vậy có thể coi a/b là mức giá giới hạn tối thiểu mà người sản xuất chấp nhận.

Cho D = 0 (không có cầu), suy ra p = α/β, có thể coi α/β là mức giá giới hạn tối đa người tiêu dùng chấp nhận.

Điều kiện cân bằng thị trường S = D tức là $-a + bp = \alpha - \beta p$, giải phương trình này ta được mức giá cân bằng $\bar{p} = \frac{\alpha + a}{\beta + b}$ và lượng cân bằng $\bar{Q} = \frac{\alpha b + \beta a}{\beta + b}$

Phân tích tác động của a tới $\bar{p}$: ta có: $\frac{\partial \bar{p}}{\partial a} = \frac{1}{\beta + b} > 0$, do

giả thiết b, $\beta > 0$. Chú ý rằng ta có thể tính $\frac{\partial \bar{p}}{\partial a}$ từ phương trình cân bằng và sẽ được kết quả tương tự.

Thí dụ 1. 20: Mức cầu một loại hàng (D) phụ thuộc vào giá của hàng hoá đó (p) và thu nhập của người tiêu dùng (M) có dạng như sau:

$$D = 1,5\ M^{0,3}\ p^{-0,2}$$

Mức cung loại hàng trên (S) có dạng: $S = 1,4p^{0,3}$

a. Xác định hệ số co dãn của cầu theo giá, theo thu nhập.

b. Hãy xem xét tác động của thu nhập M tới mức giá cân bằng.

Giải:

a. Do hàm cầu có dạng hàm Cobb - Douglas nên ta có $\varepsilon_p^{D'} = -0.2$, $\varepsilon_M^D = 0,3$.

b. Ta có phương trình cân bằng S = D, tức là $1,4\ p^{0,3} = 1,5\ M^{0,3}p^{-0,2}$. Để phân tích tác động của thu nhập M tới giá cân bằng ta cần tính $\frac{\partial \bar{p}}{\partial M}$. Ta có thể tính biểu thức này từ phương trình cân bằng với việc áp dụng tính đạo hàm hàm ẩn. Ta có:

$$1,4p^{0,3} - 1,5M^{0,3}p^{-0,2} = 0$$

vì vậy $\frac{\partial \bar{p}}{\partial M} = \frac{(1,5\times 0,3)M^{-0,7}p^{-0,2}}{(1.4\times 0,3)p^{-0,7} + (1,5\times 0,2)M^{0,3}p^{-1,2}}$ và được tính tại mức giá cân bằng. Do M, $\bar{p} > 0$ nên $\frac{\partial \bar{p}}{\partial M} > 0$, tức là khi thu nhập tăng (giảm) sẽ làm giá cân bằng tăng (giảm).

Chú ý: Nếu các hàm cung, cầu trong mô hình cân bằng thị trường được cho bằng các hàm ngược thì mô hình sẽ có dạng:

$$p_S = p(S, a, b...)$$

$$p_D = p(D, \alpha, \beta...)$$

$$p_S = p_D$$

Cách thức phân tích mô hình hoàn toàn tương tự như trước.

Mô hình cân bằng vĩ mô - Mô hình cân bằng thị trường hàng hoá - dịch vụ

+ Đặt vấn đề: Phân tích kinh tế vĩ mô là phân tích mối liên hệ giữa các biến số kinh tế tổng hợp (biến gộp) đặc trưng cho hoạt động của toàn bộ nền kinh tế. Trong kinh tế thị trường, hoạt động của nền kinh tế diễn biến trong ba thị trường gộp: thị trường hàng hoá - dịch vụ, thị trường tiền tệ và thị trường lao động. Cả ba thị trường này đều có liên hệ với nhau. Trong mỗi thị trường đều xuất hiện mức tổng cung, mức tổng cầu loại hàng hoá tương ứng. Đối với nền kinh tế mở, tham gia vào mức tổng cung, tổng cầu còn có các chủ thể bên ngoài quốc gia. Nghiên cứu và phân tích các nhân tố tác động đến tổng cung, tổng cầu, cân bằng của ba thị trường là việc quan trọng trong phân tích và hoạch định chính sách của Nhà nước. Trong khôn khổ môn học, chúng ta chỉ đề cập tới tình huống ngắn hạn, do vậy công nghệ sản xuất và thị hiếu tiêu dùng có thể giả thiết là không đổi và đồng thời chỉ xét thị trường hàng hoá - dịch vụ với các phương trình dạng tuyến tính.

Mô hình hoá: Các chỉ tiêu kinh tế vĩ mô sử dụng trong mô hình là các chỉ tiêu thực (tính theo giá cố định).

Mô tả cung: Vì chúng ta chỉ xét thị trường hàng hoá - dịch vụ nên tổng cung của nền kinh tế (mức sản lượng, kết quả sản xuất) được coi là ngoại sinh và ký hiệu là Q. Tổng cung có thể được đo bằng tổng sản phẩm quốc nội (GDP) hoặc tổng thu nhập quốc gia (GNI).

Mô tả cầu: Tổng cầu của nền kinh tế bao gồm các bộ phận cấu thành:

C - Nhu cầu tiêu dùng của dân cư

I - Nhu cầu cho đầu tư của dân cư

G - Nhu cầu tiêu dùng của chính phủ (của Nhà nước) chi tiêu của chính phủ

EX - Nhu cầu cho xuất khẩu.

Ta có các phương trình hành vi sau đây mô tả quan hệ giữa các biến:

+ Tiêu dùng của dân cư được giả thiết là có một bộ phận không phụ thuộc thu nhập - phần tiêu dùng tự định C_0 và phần phụ thuộc vào thu nhập khả dụng, như vậy ta có:

$$C = C_0 + \beta(Y - T)$$

trong đó Y: Thu nhập quốc dân, T: Thuế và giả thiết là $C_0 > 0$; $0 < \beta < 1$. Ta có thể xem **β là khuynh** hướng tiêu dùng biên (MPC).

+ Đầu tư I trong trường hợp đơn **giản thường** được giả thiết là gồm một phần không phụ thuộc lãi suất - I_0 và một phần phụ thuộc tuyến tính theo lãi suất r, ta có:

$$I = I_0 - \alpha r \quad \text{với } \alpha > 0$$

Nếu nhập khẩu là IM, tổng cầu trong nước sẽ là:

$$C + I + G + EX - IM.$$

+ Thuế T được giả thiết gồm khoản thuế thu nhập (δY) và các loại thuế khác (γ), như vậy: $T = \gamma + \delta Y$ với $\gamma > 0$; $0 < \delta < 1$.

Chúng ta có thể coi δ thuế suất của thuế thu nhập (thuế suất gộp).

Điều kiện cân bằng thị trường hàng hoá - dịch vụ:

Do tổng cung trong nước được thanh toán bằng thu nhập để đáp ứng tổng cầu trong nước nên ta có phương trình cân bằng:

$$Y = C + I + G + EX - IM$$

Như vậy ta có mô hình:

$$Y = C + I + G + EX - IM$$

$$C = C_0 + \beta(Y - T) \text{ với } C_0 > 0;\ 0 < \beta < 1$$

$$I = I_0 - \alpha r \text{ với } \alpha > 0$$

$$T = \gamma + \delta Y \text{ với } \gamma > 0;\ 0 < \delta < 1$$

Các biến nội sinh của mô hình gồm Y, C, I, T, các biến còn lại là ngoại sinh.

+ Phân tích mô hình:

Giải mô hình: Giải hệ phương trình trong mô hình với các ẩn số là các biến nội sinh ta được:

$$\overline{Y} = \frac{C_0\alpha - \beta\gamma + I_0 - \alpha r + G + EX - IM}{1 - \beta + \beta\delta} \qquad (1.36)$$

Phân tích so sánh tĩnh: Phân tích tác động của chính sách tài khoá.

Để xem xét tác động của chính sách tài khoá (thu - chi

ngân sách Nhà nước) đối với sản xuất (Y) ta cần tính các biểu thức $\frac{\partial \overline{Y}}{\partial G}, \frac{\partial \overline{Y}}{\partial \gamma}, \frac{\partial \overline{Y}}{\partial \delta}$. Từ (1. 36) ta dễ dàng tính được:

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial G} = \frac{1}{1-\beta+\beta\delta} > 0 \qquad (1.37)$$

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \gamma} = \frac{-\beta}{1-\beta+\beta\delta} < 0 \qquad (1.38)$$

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \delta} = \frac{-\beta \overline{Y}}{1-\beta+\beta\delta} < 0 \qquad (1.39)$$

- Như vậy khi chính phủ tăng chi tiêu G thì theo (1.37) $\overline{Y}$ sẽ tăng, tức là có kích cầu, mặt khác vế phải của (1.37) lớn hơn 1 nên khi mức tăng của tổng cầu sẽ lớn hơn so với mức tăng chi tiêu của chính phủ. Như vậy việc tăng chi tiêu đã được khuếch lên, vì lý do này nên $\frac{\partial \overline{Y}}{\partial G}$ gọi nhân tử gia tăng chi tiêu của chính phủ.

- Khi chính phủ tăng thuế thì theo (1.38) và (1.39) ta thấy $\overline{Y}$ giảm.

Tuỳ thuộc vào tình huống cụ thể, mô hình cân bằng vĩ mô trên có thể đơn giản hoá, ví dụ đầu tư I, thuế T có thể coi là ngoại sinh, nhưng ta có thể mở rộng mô hình, ví dụ xuất khẩu, nhập khẩu có thể coi là biến nội sinh.

Thí dụ 1. 21: Một số chỉ tiêu vĩ mô của một nền kinh tế có các mối liên hệ sau:

$$Y = C + I + G + EX - IM$$

$$C = \beta Y_d \text{ với } 0 < \beta < 1$$

$$IM = pY_d \text{ với } 0 < p < 1$$

$$Y_d = (1 - t)\, Y \text{ với } 0 < t < 1$$

trong đó: Y: Thu nhập quốc dân, C: Tiêu dùng của dân cư, Y_d: Thu nhập khả dụng, I: Đầu tư, G: Chi tiêu của chính phủ, EX: Xuất khẩu, IM: Nhập khẩu, t: Thuế suất thuế thu nhập.

a. Với G = 400 tỉ đồng, I = 250 tỉ, EX = 250 tỉ, $\beta = 0{,}8$, $\rho = 0{,}2$, t = 0,1. Hãy xác định thu nhập và tình trạng ngân sách Nhà nước.

b. Với các chỉ tiêu ở câu a, có ý kiến cho rằng nếu giảm xuất khẩu 10% thì chính phủ có thể tăng chi tiêu 10% mà không ảnh hưởng tới thu nhập. Hãy nhận xét ý kiến này.

Giải:

a. Giải mô hình trên ta được $\overline{Y} = \dfrac{I + G + EX}{1 - \beta(1-t) + \rho(1-t)}$.

Thay số liệu vào ta sẽ tính được $\overline{Y} = 9000$ tỉ. Thu ngân sách là $t\overline{Y} = 900$ tỉ, chi ngân sách G = 400 tỉ nên có thặng dư ngân sách.

b. Để có được nhận xét về ý kiến nêu ra, ta cần tính được độ co giãn của $\overline{Y}$ theo G và theo EX.

Ta có: $\dfrac{\partial \overline{Y}}{\partial G} = \dfrac{1}{1 - \beta(1-t) + \rho(1-t)}$

và $\dfrac{\partial \overline{Y}}{\partial EX} = \dfrac{1}{1 - \beta(1-t) + \rho(1-t)}$ tuy chúng bằng nhau nhưng do $\dfrac{G}{\overline{Y}} > \dfrac{EX}{\overline{Y}}$ nên $\varepsilon_G^{\overline{Y}} > \varepsilon_{EX}^{\overline{Y}}$. Khi giảm 10% xuất khẩu, thu nhập giảm $(10 \times \varepsilon_{EX}^{\overline{Y}})\%$ và khi tăng chi tiêu của chính phủ 10%

thu nhập tăng $(10 \times \varepsilon_G^Y)\%$ tác động cuối cùng là thu nhập s
tăng $(10 \times (\varepsilon_G^Y > \varepsilon_{EX}^Y))\%$.

3. Mô hình kinh tế động

Trong các mô hình đã đề cập, chúng ta chỉ xét các hoạ
động kinh tế diễn ra tại cùng một thời điểm, yếu tố thời gia
không có vai trò gì nên các mô hình này là mô hình tĩnh
Trong thực tế, hoạt động kinh tế thường diễn biến theo thờ
gian do đó có mối liên hệ giữa quá khứ, hiện tại, tương lai v
như vậy yếu tố thời gian sẽ xuất hiện trong mô hình với t
cách là biến ngoại sinh. Các mô hình kinh tế có chứa biế
thời gian gọi là là mô hình kinh tế động. Trong mô hìn
động, mối liên hệ giữa các biến số được xem xét ở các thờ
điểm khác nhau và để mô tả sự biến động của chúng theo thờ
gian - mô tả quỹ đạo của biến - thường là phải sử dụng
phương trình vi phân hoặc sai phân với biến độc lập là biế
thời gian t. Để phân phân tích mô hình động, chúng ta phải sử
dụng các kiến thức liên quan tới phương trình vi phân. So vớ
mô hình tĩnh, mô hình động phản ánh thực tế xác thực đơ
nhưng cũng phức tạp hơn về cấu trúc. Để minh hoạ mô hình
động và việc phân tích, ta sẽ xét hai mô hình đơn giản: mô
hình cân bằng giá tuyến tính và mô hình tăng trưởng kinh tế
Domar.

a. Mô hình cân bằng giá (trường hợp tuyến tính)

Trong phần đầu chương này cũng như trong nhiều tài liệu
kinh tế học, mô hình cân bằng giá luôn là một thí dụ điển
hình của lớp mô hình cân bằng.

+ ***Đặt vấn đề:*** Vấn đề đặt ra là trong thực tế giá của một

mặt hàng không tức khắc xác định tại điểm cân bằng. Theo thời gian giá luôn được điều chỉnh bởi nhiều tác động, đặc biệt là chênh lệch cung - cầu. Phải chăng quá trình dao động được mô tả trong hình 1 luôn dẫn đến giá cân bằng? Câu trả lời là không.

+ Thiết lập mô hình:

Giả sử trên thị trường giá một mặt hàng tác động đến cung - cầu như sau:

Mô hình a: $Q_d = a - bP$ $(a, b > 0)$

$Q_s = -c + dP$ $(c, d > 0)$

Điều kiện cân bằng: $Q_d = Q_s$.

Mô hình b: $Q_{dt} = a - bP_t$ $(a, b > 0)$

$Q_{st} = -c + dP_{t-1}$ $(c, d > 0)$

Điều kiện cân bằng: $Q_{dt} = Q_{st}$.

Giả thiết trong mô hình b có thể chấp nhận dễ dàng hơn trong mô hình a. Tuy vậy, chúng ta chỉ bàn đến tính chất tồn tại giá cân bằng nên bạn đọc có thể tự tìm hiểu tình huống này.

+ Phân tích mô hình:

a. Từ các chương trình cung - cầu và điều kiện cân bằng ta có:

$$\bar{P} = \frac{a+c}{b+d}$$

Nếu tại $t = 0$ ta đã có $P_0 = \bar{P}$ thì giá cân bằng tồn tại ở mọi thời điểm.

Nếu tại t = 0, $P_0 \neq \bar{P}$, như vậy theo hình a tồn tại chênh lệch cung cầu ($Q_d - Q_s$). Giả sử chênh lệch cung-cầu tại t quyết định sự thay đổi của giá cả P và quan hệ này có dạng:

$$\frac{dD}{dt} = k(Q_d - Q_s) \text{ với } k > 0.$$

Thay các hàm cung-cầu vào phương trình này ta có:

$$\frac{dD}{dt} = k(b+d)P = k(a+c)$$

Phương trình vi phân tuyến tính với hệ số là hằng số trên cho nghiệm:

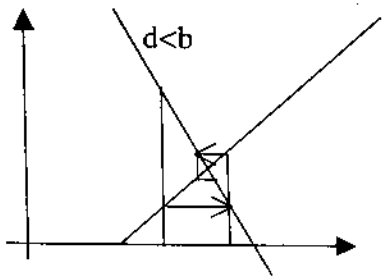
$$P_t = (P_0 - \bar{P})e^{-k(b+d)t} + \bar{P}$$

Khi $t \to \infty$ ta thấy P_t dần tới giá cân bằng $\bar{P}$.

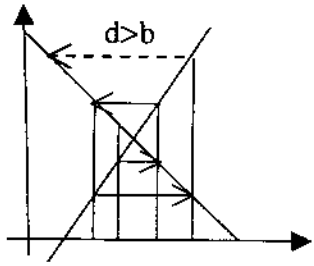
b. Với mô hình b mọi chuyện không hoàn toàn như ở mô hình a. Từ điều kiện cân bằng ta có:

$P_{t+1} + \frac{d}{b}P_t = \frac{a+c}{b}$, nghiệm của phương trình này với P_0 cho trước là: $Pt = (P_0 - \frac{a+c}{b+d})(-\frac{d}{b})^t + \frac{a+c}{b+d}$

Điều kiện P_t có giới hạn hữu hạn khi t tăng vô hạn là d < b. Như vậy hai tình trạng có thể được mô tả như sau:



Tồn tại cân bằng giá



Không tồn tại cân bằng giá

b. Mô hình tăng trưởng kinh tế Domar

+ Đặt vấn đề: Khi nghiên cứu sự tăng trưởng của một nền kinh tế, một trong những vấn đề được quan tâm là xác lập mối liên hệ giữa lượng vốn đầu tư và sự gia tăng sản lượng (đầu ra). Nếu biết được mối liên hệ này ta có thể tính được nhu cầu đầu tư của nền kinh tế để đảm bảo yêu cầu tăng trưởng đã dự kiến.

+ Mô hình hoá:

+ Các giả thiết:

Năng lực sản xuất của nền kinh tế tại thời điểm t được mô tả bởi hàm sản xuất chỉ phụ thuộc (tuyến tính) vào lượng vốn, không tính tới lao động cũng như tiến bộ công nghệ. Ký hiệu Q(t), K(t) là năng lực sản xuất, lượng vốn ở thời điểm t, ta có $Q(t) = \rho K(t)$ với tham số $\rho > 0$ và là hằng số.

Sự gia tăng của lượng vốn trong chu kỳ xem xét là do đầu tư trong kỳ (như vậy đầu tư sẽ không có độ trễ và cũng không xét tới khấu hao vốn). Hoạt động đầu tư ngoài việc tác động tới năng lực sản xuất (thông qua vốn) còn tác động tức thời, không có trễ tới tổng cầu (thu nhập) theo dạng "nhân tử" tương tự như trong mô hình cân bằng vĩ mô. Gọi Y(t), I(t) là tổng cầu, đầu tư của kỳ t thì:

$$\frac{dK}{dt} = I(t)$$

$$Y(t) = \frac{1}{s} I(t),$$

tham số s với $0 < s < 1$ và là hằng số, gọi là khuynh hướng tiết kiệm biên (MPS).

Điều kiện cân bằng: Năng lực sản xuất của nền kinh tế = tổng cầu, tức là $Q(t) = Y(t)$.

+Mô hình tăng trưởng Domar:

$$\frac{dK}{dt} = I(t) \qquad (1)$$

$$Y(t) = \frac{1}{s} I(t) \qquad (2)$$

$$Q(t) = \rho K(t) \qquad (3)$$

$$Q(t) = Y(t) \qquad (4)$$

Các biến nội sinh: Y, Q, K, I; biến ngoại sinh: t.

Đặt $\frac{1}{\rho} = v$, khi này v được gọi là hệ số gia tăng vốn - sản lượng hoặc hệ số ICOR (Increment Capital - Output Ratio: $\Delta K / \Delta Y$), v cho biết số vốn cần thiết để gia tăng 1 đơn vị sản lượng (đầu ra).

+ Phân tích mô hình:

Giải mô hình: Trong trường hợp mô hình động, ta cần biểu diễn các biến nội sinh theo thời gian, tức là xác định quỹ đạo của chúng xuất phát từ thời kỳ gốc. Cho t = 0 là thời kỳ gốc và ký hiệu $Y_0 = Y(0)$, $Q_0 = Q(0)$, $K_0 = K(0)$, $I_0 = I(0)$.

Lấy đạo hàm theo thời gian t cả hai vế của (2), (3), (4) ta được:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{s}\frac{dI}{dt} \qquad (5)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \rho\frac{dK}{dt} \qquad (6)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dY}{dt} \qquad (7)$$

Từ (5), (6), (7) và sử dụng (1) ta có:

$$\rho I(t) = \frac{1}{s}\frac{dI}{dt}$$

Suy ra: $$\frac{dI}{dt} - \rho s I(t) = 0 \qquad (8)$$

Đây là phương trình vi phân đối với I, nghiệm của phương trình này với điều kiện ban đầu $I_0 = I(0)$ là $I(t) = I_0 e^{\rho s t}$. Thay vào các phương trình trong mô hình ta sẽ tìm được:

$$Y(t) = Y_0 e^{\rho s t},\ K(t) = K_0 e^{\rho s t},\ Q(t) = Q_0 e^{\rho s t}.$$

Phân tích kết quả:

- Ta nhận thấy nhịp tăng trưởng của Y,K,I,Q đều bằng nhau và bằng $\rho s = sv$ và là hằng số. Sự tăng trưởng này của nền kinh tế gọi là tăng trưởng cân đối (các chỉ tiêu tăng cùng nhịp độ).

- Ta hãy xét trường hợp: Giả sử trong thực tế đầu tư tăng với nhịp độ r và $r \neq s/v$, khi này sẽ ra xảy ra tình trạng gì đối với nền kinh tế? Ta có $I(t) = I_0 e^{rt}$, suy ra $\frac{dI}{dt} = r I_0 e^{rt}$. Từ (5) và (6) suy ra $\frac{dY}{dt} = \frac{r}{s} I_0 e^{rt}$, $\frac{dQ}{dt} = \rho I(t) = \rho I_0 e^{rt}$.

Ta xét tỷ số $\frac{\frac{dY}{dt}}{\frac{dQ}{dt}}$, tử số phản ánh tác động của đầu tư tới tổng cầu, còn mẫu số thể hiện tác động tới năng lực sản xuất. Theo kết quả trên ta có $\frac{\frac{dY}{dt}}{\frac{dQ}{dt}} = r/\rho s$. Nếu *đầu tư tăng nhanh* hơn mức cần thiết ($r > \rho s$) thì $\frac{\frac{dY}{dt}}{\frac{dQ}{dt}} > 1$, do đó tác

động của đầu tư tới năng lực sản xuất yếu hơn tới tổng cầu, nền kinh tế sẽ ở tình trạng năng lực sản xuất không đáp ứng được nhu cầu, tức là *thiếu hụt năng lực sản xuất*. Nếu ngược lại, *đầu tư tăng chậm* hơn mức cần thiết ($r > \rho s$) thì nền kinh tế sẽ xảy ra tình trạng *thừa năng lực sản xuất*. Đây là một nghịch lý gây ra nhiều tranh luận giữa các nhà kinh tế. Có lẽ do mô hình Domar còn quá đơn giản nên xuất hiện nghịch lý này.

Mô hình được sử dụng trong thực tế là mô hình rời rạc theo thời gian, khi này mô hình có dạng:

$$K(t) - K(t-1) = I(t)$$

$$Y(t) = \frac{1}{s} I(t)$$

$$Q(t) = \rho K(t)$$

$$Q(t) = Y(t)$$

Nghiệm của mô hình sẽ là:

$$Y(t) = \left(1 + \frac{s}{v-s}\right) Y(t-1)$$

$$K(t) = \left(1 + \frac{s}{v-s}\right) K(t-1)$$

$$I(t) = \left(1 + \frac{s}{v-s}\right) I(t-1)$$

Nhịp tăng trưởng của các chỉ tiêu đều là $\frac{s}{v-s}$.

Thí dụ 1.22: Nếu hệ số ICOR $v = 2,8$ và tỉ lệ tiết kiệm $s = 0,2$ thì nhịp tăng của Y là $0,2/(2,8 - 0,2) \approx 0,070$ hay 7%.

Trên đây ta đã xét một số mô hình minh hoạ cho việc sử dụng mô hình. Để phân tích mô hình kinh tế trong những trường hợp khác nhau có thể sử dụng nhiều công cụ khác để phân tích cho phù hợp với mục đích nghiên cứu.

Bài tập chương I

1. Cho hàm doanh thu trung bình AR(Q) = 15 - Q

a. Xác định mức doanh thu cận biên MR tại $Q_1 = 5$; $Q_2 = 8$. Phân tích các kết quả.

b. Xác định mức chênh lệch của doanh thu cận biên và doanh thu trung bình như một hàm của Q.

c*. Nêu biểu thức tổng quát xác định mức chênh lệch của doanh thu cận biên và doanh thu trung bình nếu hàm doanh thu trung bình có đạo hàm.

TL: a: MR(5) = 5, MR(8) = -1; b: $Q^2/(15 - Q)$; c: Q. dAR/dQ

2. Cho hàm tổng chi phí

$TC = Q^3 - 5Q^2 + 14Q + 144$; $(Q > 0)$.

a. Khảo sát sự thay đổi tuyệt đối của TC theo Q từ đó cho nhận xét về mở rộng sản xuất.

b. Tính hệ số co giãn của TC theo Q tại Q = 2.

c. Cho giá sản phẩm là P = 70, với mức thuế doanh thu 20%, tính lợi nhuận khi Q = 3; tìm các điểm hoà vốn và phân tích sự thay đổi của hàm tổng lợi nhuận.

TL: b: 0, 075; c: 0, 3, 9

3. Cho hàm tổng chi phí $TC = 5000 + \frac{5Q^2}{Q+3}$ (Q là sản lượng)

a. Tìm hàm chi phí cận biên MC.

b. Tính chi phí trung bình AC tại Q = 100.

c. Vẽ đồ thị hàm chi phí biến đổi trung bình (VC/Q).

d. Tính hệ số co giãn của TC theo Q tại Q = 17.

TL: b: 54,85; d: 0,0125

4. Cho hàm tổng chi phí TC = 4000 + 10Q + 0,1Q^2 (Q) là sản lượng) .

Giá cả P được xác định bởi phương trình: Q = 800 – 2,5P

a. Tìm hàm chi phí cận biên MC.

b. Tìm hàm chi phí trung bình AC, khảo sát sự thay đổi của nó.

c. Tìm hệ số co giãn của TC tại P = 80.

TL: c: 0,2476

5. Chi phí trung bình khai thác một loại khoáng sản:

$$AC = 12 + \frac{0,1}{0,2 + Q} \quad (Q \text{ là sản lượng})$$

a. Tìm hàm chi phí cận biên MC tại Q = 10.

b. Tìm biểu thức tính chênh lệch của chi phí trung bình AC và chi phí cận biên MC, nhận xét sự thay đổi của nó.

c. Lập biểu thức tính hệ số co giãn của tổng chi phí TC.

TL: a: 12,0002;

6. Cho hàm chi phí trung bình để sản xuất một loại sản phẩm:

$$AC = Q^2 - 12Q + 60 \quad (Q \text{ là sản lượng})$$

a. Xác định hàm tổng chi phí TC, phần chi phí biến đổi VC và chi phí cố định FC.

b. Xác định các biểu thức tính sự thay đổi tuyệt đối và tương đối của AC theo Q và cho các nhận xét.

c. Xác định hàm chi phí cận biên MC và mô tả trên cùng một mặt phẳng toạ độ đồ thị hai hàm MC; AC. Từ đồ thị hãy nêu các nhận xét về quan hệ giữa MC và AC.

7. Cho mô hình thị trường:

$$Q_d = Q_s$$

$$Q_d = D(P, Y_0) \qquad \left(\frac{\partial D}{\partial P} < 0; \frac{\partial D}{\partial Y_0} > 0\right)$$

$$Q_s = S(P) \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial P} > 0\right)$$

Trong đó: Q_d, Q_s là mức cầu và mức cung một loại hàng;

P là giá

Y_0 là thu nhập.

a. Giải thích mô hình và các điều kiện.

b. Giả định tồn tại giá cân bằng P^*; khi Y_0 tăng thì giá cân bằng sẽ biến động như thế nào? Giải thích ý nghĩa kinh tế.

c. Gọi Q^* là lượng cung - cầu ở trạng thái cân bằng và hãy cho biết khi Y_0 tăng thì lượng cân bằng thay đổi như thế nào. Viết biểu thức mô tả sự thay đổi đó.

8. Cho mô hình cung - cầu:

$$Q_d = 10 + 0{,}1Y_0 - 0{,}2P$$

$$Q_s = -14 + 0{,}6P$$

Trong đó: Q_s, Q_d là cung cấp và nhu cầu một loại hàng; Y_0 là thu nhập dân cư (theo đầu người); P là giá cả.

a. Tìm biểu thức tính giá cân bằng nếu điều kiện cân bằng là:

a_1: $Q_s = Q_d$

a_2: $Q_d = 0,9Q_s$

b. Tính hệ số có giãn của giá cân bằng theo Y_0 tại $Y_0 = 80$ trong cả hai trường hợp trên. Giải thích ý nghĩa kinh tế của kết quả tính được.

TL: a_1: $30 - Y_0/8$, a_2: $(22,6 - 0,1Y_0)/0,74$.

9. Cho mô hình cân bằng thu nhập quốc dân:

$S(Y) + T(Y) = I(Y) + G_0$ với $S', T', I' > 0$; $S' + T' > I'$

Trong đó: S là tiết kiệm; T là thuế; I là đầu tư; G_0 là tiêu dùng của chính phủ.

a. Giải thích ý nghĩa kinh tế của mô hình và ý nghĩa kinh tế của các mối quan hệ của các đạo hàm bậc nhất S', T', I'.

b. Xác định biểu thức mô tả sự thay đổi của thu nhập cân bằng $\overline{Y}$ theo G_0. Giải thích ý nghĩa kinh tế.

10. Giả sử dân số tăng theo mô hình $P(t) = P(0)2^{bt}$ và tiêu dùng dân cư tăng theo mô hình $C(t) = C(0)e^{at}$.

a. Tính hệ số tăng trưởng của dân số và tiêu dùng dân cư.

b. Với điều kiện nào thì hệ số tăng trưởng của tiêu dùng cao hơn hệ số tăng trưởng của dân số. Nêu ý nghĩa của quan hệ đó.

c. Giả thiết lượng lao động được sử dụng tỉ lệ với dân số và có dạng $L(t) = kP(t)$ $(k < 1)$; sản lượng $Y(t)$ là một hàm của vốn $K(t)$ và lao động dạng Cobb - Douglas và $C(t)$ là một hàm tuyến tính của $Y(t)$. Hãy xác định một mô hình thể hiện các quan hệ giữa các biến.

11. Cho hàm sản xuất $Y(t) = 0,2.\ K^{0,4}.\ L^{0,8}$

Trong đó: $K = 120 + 0,1t$; $L = 200 + 0,3t$.

a. Tính hệ số co giãn của Y theo K và theo L.

b. Tính hệ số tăng trưởng của vốn K, lao động L và Y.

c. Hãy cho biết hiệu quả của việc tăng qui mô sản xuất trong trường hợp này.

12. Xét mô hình lợi nhuận:

$\prod(Q) = TR(Q) - TC(Q) - aTR(Q)$. Trong đó: TR là tổng doanh thu: TC là tổng chi phí; a là thuế suất theo doanh thu.

a. Xác định biểu thức điều kiện của Q để lợi nhuận cực đại

b. Khi thuế suất tăng, mức Q tối ưu biến động như thế nào.

c. Hãy làm một phân tích tương tự nếu thuế đánh vào vốn sản xuất thực hiện (Tổng chi phí).

13. Một công ty có thể sản xuất và cung ứng cho thị trường hai mặt hàng với hàm tổng doanh thu và tổng chi phí cho 2 mặt hàng:

$$TR = P_1Q_1 + P_2Q_2$$

$$TC = 2Q^2_1 + Q_1Q_2 + 3Q^2_2$$

Trong đó: P_i, Q_i là giá cả và sản lượng hàng hoá.

a. Xác định công thức tính tổng lợi nhuận cực đại.

b. Áp dụng công thức tìm được ở câu a, tìm sản lượng cực đại lợi nhuận.

c. Tính hệ số co giãn của tổng chi phí theo khối lượng của từng mặt hàng và hệ số co giãn đồng thời theo cả hai mặt hàng, tại điểm cực đại lợi nhuận tìm được ở câu b.

14. Nhu cầu hai mặt hàng phụ thuộc giá như sau:

$$Q_1 = 40 - 2P_1 - P_2;\ Q_2 = 35 - P_1 - P_2.$$

Tổng chi phí là hàm của các sản lượng:

$$TC = Q^2_1 + 2Q^2_2 + 12$$

Trong đó: P_i, Q_i là giá cả và sản lượng hàng hoá ($i=1 \div 2$)

a. Xác định mức Q_1, Q_2 sao cho tổng lợi nhuận lớn nhất.

b. Tính chi phí cận biên cho từng mặt hàng tại mức tối ưu tìm được ở câu a.

c. Hai mặt hàng này có thay thế lẫn nhau trong tiêu dùng không?

15. Một doanh nghiệp sản xuất có hàm lợi nhuận phụ thuộc hai yếu tố vốn và lao động như sau:

$$U = -12 + 0,3K + 0,8L - 0,1K^2L^2 \quad (K, L > 0)$$

a. Với lượng vốn $K = K_0$, hãy xác định qui mô lao động có lợi ích cao nhất của doanh nghiệp. Vẽ đồ thị hàm U tại K_0.

b. Trong điều kiện của câu a, hãy xác định qui mô sản xuất tối ưu (lợi ích cao nhất).

c. Hãy phân tích U theo vốn K, khi $L = L_0$ (tương tự như trên). Giả sử doanh nghiệp đang ở tình trạng tối đa lợi ích buộc phải tăng một trong hai yếu tố trên đôi chút thì nên chọn yếu tố nào.

16. Trong mô hình cân đối liên ngành người ta xác định giá trị sản lượng các ngành theo công thức: $X(t) = [E - A(t)]^{-1}x(t)$, trong đó, x(t) là véc tơ giá trị sản phẩm cuối cùng, A(t) là ma trận hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị. Hãy chứng tỏ rằng các hệ số trên cột thứ j của ma trận $C = [E - A(t)]^{-1}$ thể hiện tốc độ tăng giá trị sản lượng của các ngành theo giá trị

sản phẩm cuối cùng của ngành j. Xác định công thức tính hệ số co giãn của giá trị sản lượng các ngành theo giá trị sản phẩm cuối cùng của một ngành.

17. Chi phí cho tiêu dùng loại hàng A được ước lượng bởi hàm sau:

$$C = -12 + 0,1M - 0,05P.$$

Trong đó: C là chi phí cho tiêu dùng hàng A của mỗi cá nhân; M là thu nhập cá nhân; P là giá hàng A.

a. Giải thích ý nghĩa kinh tế của các hệ số; có thể xem hàng A là thiết yếu không?

b. Hãy tính hệ số tăng trưởng của nhu cầu theo thời gian t nếu hệ số tăng của thu nhập theo thời gian là 12% và hệ số này của giá hàng A là 8%.

18. Chi phí cho tiêu dùng loại hàng A được ước lượng bởi hàm sau:

$$C(t) = 8 + 0,4M(t) - 0,02M^2(t) + 0,1C(t-1).$$

Trong đó: C(t) là chi phí cho tiêu dùng hàng A của mỗi cá nhân trong thời kỳ t; M(t) là thu nhập cá nhân trong thời kỳ t.

a. Giải thích ý nghĩa kinh tế của các hệ số trong mô hình.

b. Cho C(t) = 10. Tìm lượng thu nhập có chi tiêu tối đa trong thời kỳ tiếp theo nếu thu nhập trong thời kỳ đó là $M(t+1) \leq M_0$.

c. Tìm công thức tính tốc độ tăng chi phí C(t) theo thời gian. Tốc độ này phụ thuộc vào mức tỉ lệ tăng thu nhập và chi phí kỳ trước như thế nào?

19. Tổng số vốn đầu tư nước ngoài (I), phụ thuộc vào đơn

giá tiền công (W) và tốc độ tăng thu nhập quốc dân (ρ) của một nước như sau:

$$I = -25 + 12\rho^2 - 0,4W.$$

a. Xác định biểu thức tính sự thay đổi của I khi các yếu tố đồng thời thay đổi.

b. Giả sử mức tăng thu nhập quốc dân ổn định là 6% xác định thời hạn tiền công có thể thu hút vốn đầu tư nước ngoài.

20. Tiêu dùng tiềm năng ở Nam Triều Tiên trong thời kỳ 1961 - 1980 được ước lượng bởi hàm sau:

$$LnE = 0,5892 + 0,5442LnE_{-1} + 0,4518Y - 0,056D.$$

Trong đó: E là tiềm năng tiêu dùng, E_{-1} là tiềm năng tiêu dùng kỳ trước đó; Y là tổng sản phẩm trong nước;

D = 0 với các năm 1961 - 1973 (thời kỳ 1) và D = 1 với các năm 1974 - 1980 (thời kỳ 2).

a. Giải thích ý nghĩa kinh tế của mô hình và các tham số trên.

b. Tính tiềm năng tiêu dùng cận biên theo thu nhập với E_{-1} đã xác định.

c. Tính hệ số tăng trưởng của tiêu dùng trong từng thời kỳ với E_{-1} đã xác định.

21. Giá một loại hàng P và chênh lệch cung - cầu S liên hệ với nhau bởi phương trình: $SP - 0,1P^2InS = c$. Hãy tính tốc độ thay đổ của giá khi chênh lệch cung - cầu thay đổi.

22. Cho hàm thu nhập tính trên đầu người:

$$y(t) = \left[\frac{1}{\delta}(\delta + n + \frac{\beta}{1-\alpha})\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} e^{\frac{\beta t}{1-\alpha}}$$

Trong đó: δ là hệ số giảm giá của vốn theo thời gian

β là hiệu ứng tiến bộ kỹ thuật đối với thu nhập

α là hệ số co giãn của vốn đối với thu nhập

n là tỉ lệ tăng dân số hàng năm.

Giả sử δ, α không đổi, để duy trì thu nhập đầu người ở mức $y^*(t)$ cho trước cần có chính sách đảm bảo tốc độ tăng của dân số theo sự biến đổi của hiệu ứng tiến bộ kỹ thuật như thế nào?

23. Giả sử lượng vốn (qui đổi thành tiền mặt) của một công ty hàng năm nhờ đầu tư là 12%. Tỉ lệ mất giá của tiền mặt hàng năm là 4%. Hãy tính hệ số tăng trưởng của vốn mà công ty đạt được sau 10 năm, biết rằng năm đầu tiên công ty có lượng vốn là K(0).

24. Thu nhập quốc dân của một quốc gia (Y) phụ thuộc vào vốn (K), lao động được sử dụng (L) và ngân sách đào tạo 5 năm trước đó (G) như sau:

$$Y = 0{,}24.K^{0.3}.L^{0.8}.G^{0.05}$$

Trong đó các yếu tố biến đổi theo thơi gian như sau: hàng năm vốn tăng 15%; công ăn việc làm tăng 9%; chi phí cho đào tạo tăng 20%.

a. Tính hệ số tăng trưởng của thu nhập quốc dân.

b. Trong điều kiện Y, K không đổi còn công ăn việc làm phụ thuộc vào ngân sách đào tạo trước đó 5 năm, hãy viết biểu thức chỉ ra sự thay đổi của công ăn việc làm theo ngân sách đào tạo 5 năm trước.

25. Giả sử trung bình tổng lượng lao động trong một thời kỳ tại một nước là L_0, khối lượng lao động sẵn sàng làm việc (Y) và tiền công (X), thoả mãn phương trình sau:

$$Y - (a_1X + a_2X^2 + a_3X^3)(L_0 - Y) = 0$$

Hãy phân tích mô hình trên, trong các tình huống khác nhau về cung cầu lao động. Xác định cách tính tiền công cận biên theo số lao động sẵn sàng làm việc hoặc ngược lại.

26. Lượng lao động (việc làm) thu hút thêm và các ngành sản xuất vật chất L và lượng vốn đầu tư I có thể mô tả bởi mô hình:

$L^2 + a_0 + a_1I + a_2I^2 = 0$, trong đó: $a_0, a_2 > 0$, $a_1 < 0$; $a_1^2 > 4a_0a_2$.

a. Giải thích sự vận động của các yếu tố lao động thu hút thêm và vốn đầu tư. Tìm biểu thức tính tốc độ cận biên của lượng việc làm tăng thêm theo vốn đầu tư.

b. Hãy chọn một bộ giá trị thích hợp của các tham số và tính lượng vốn đầu tư thu hút nhiều lao động nhất.

27. Quan hệ giữa tiền công của lao động có đào tạo (V) và tỉ lệ thất nghiệp của người lao động trong một quốc gia (U), chi phí đào tạo (G) được mô tả bởi mô hình:

$$aY^2 - bG^2 - c\ln(U) = 0.$$

Trong đó: V = V(t); G = G(t); U = U(t).

a. Xác định hệ số co giãn của chi phí đào tạo theo các yếu tố khác.

b. Tính hệ số tăng trưởng của chi phí đào tạo như một hàm của các yếu tố khác.

28. Số lượng sinh viên của một quốc gia S (người) phụ thuộc vào số dân P (người) và thu nhập bình quân đầu người M (USD) như sau:

$$S = -5501688 + 378766{,}5\ln P - 5716{,}6M + 6{,}9922M^2$$

a. Hãy xác định hệ số tăng trưởng của số lượng sinh viên

hàng năm. Biết hệ số tăng trưởng của thu nhập 5% năm; tốc độ tăng dân số 2,2%.

b. Tính hệ số co giãn toàn phần của lượng sinh viên theo thu nhập và dân số.

c. Trong trường hợp dân số, thu nhập liên hệ với nhau như sau:

$$P - 4,57E + 07 + 0,16583MP + 1050205t = 0$$

Hãy viết biểu thức tính hệ số tăng trưởng của thu nhập và dân số, từ đó suy ra biểu thức tính hệ số tăng trưởng của lượng sinh viên.

29. Xét mô hình thu nhập quốc dân:

$$Y - a - cY - b - sln(R) - G_0 = 0$$

$$kY + v + \alpha/R - M_0 = 0$$

Trong đó: Y là thu nhập quốc dân; R là tỉ lệ lãi tiền gửi; G_0 là tiêu dùng chính phủ; M_0 là tổng lượng cung tiền mặt.

a. Xác định trạng thái cân bằng trong đó tỉ lệ lãi và thu nhập như các hàm phụ thuộc vào M_0 và G_0.

b. Khi chính phủ tăng 1% tiêu dùng muốn trạng thái cân bằng không thay đổi thì tổng lượng cung tiền mặt tăng bao nhiêu %?

30. Cho mô hình thu nhập quốc dân:

$$S(Y) + T(Y) = I(Y) + G_0$$

Với $S(Y) = 0,1lnY$; $T(Y) = 0,04Y - 0,1Y^2$

$I(Y) = 0,5Y + 0,02Y^2$; $G_0 = 1200$

Với Y là thu nhập quốc dân; T là thuế; I là đầu tư; S là tiết kiệm.

a. Xác định thu nhập trong trạng thái cân bằng.

b. Trạng thái cân bằng thay đổi như thế nào khi G_0 giảm 5%?

c. Nếu nhà nước cần định một mức tổng thu thuế là T_0, không phụ thuộc thu nhập thì cần đảm bảo mối quan hệ nào giữa T_0 và G_0 để thu nhập quốc dân ở trạng thái cân bằng không đổi?

31. Với cuộc khủng hoảng tiền tệ trong một quốc gia vùng Đông Nam Á vào những năm cuối thập kỷ 90. Giả sử tốc độ mất giá của đồng tiền quốc gia đó theo thời gian được biểu diễn bởi hàm f(t) thoả mãn điều kiện $f(t) \geq 0$, $f'(t) > 0$ với $t < t^*$ và $f'(t) < 0$ với $t > t^*$. Hãy nêu một mô hình điều kiện thể hiện tình trạng thay đổi của lượng vốn đầu tư nước ngoài vào quốc gia này theo thời gian t. Giải thích việc chọn mô hình đó.

32. Với các dữ kiện của mô hình dự trữ Wilson hãy tìm biểu thức cho biết khi tăng qui mô đặt hàng mỗi lần 1% thì tổng chi phí tăng bao nhiêu %? Nhận xét gì về giá trị biểu thức này tại qui mô tối ưu, giải thích. Điều đó có đúng với các mô hình tối ưu mà hàm mục tiêu đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm cực trị không?

33. Với các quan hệ liên ngành hiện vật - giá trị trong mô hình I/O

a. Hãy tìm biểu thức mô tả sự thay đổi lượng sản phẩm cuối cùng ngành i khi có thay đổi định mức tiêu dùng sản phẩm của nó trong ngành j.

b. Phân tích tác động của sự thay đổi giá sản phẩm một ngành đến chi phí sản xuất.

Chương II
BẢNG VÀO - RA
(INPUT - OUTPUT TABLES - I/O)

I. SƠ LƯỢC VỀ LỊCH SỬ PHÁT TRIỂN VÀ VIỆC ỨNG DỤNG BẢNG VÀO - RA VIỆT NAM

Bảng I/O lần đầu tiên được Wassily Leontief đưa ra vào năm 1927. Thực chất của bảng này là phương pháp "sổ kép" ghi lại việc phân phối sản phẩm của các ngành trong nền kinh tế quốc dân và quá trình hình thành sản phẩm của mỗi ngành. Mỗi ngành đều có hai chức năng: sản xuất ra sản phẩm cung cấp cho các ngành khác với tư cách là nguyên, vật liệu, bán thành phẩm và một phần dùng cho tích luỹ, tiêu dùng và xuất khẩu; đồng thời mỗi ngành lại tiêu thụ sản phẩm của các ngành khác làm nguyên liệu cho quá trình sản xuất của mình. Ngoài ra mỗi ngành còn phải sử dụng lao động, do đó phải trả lương cho người lao động trong ngành mình, phải thực hiện nghĩa vụ đối với Nhà nước và thu lợi nhuận cho mình...

Mô hình I/O phân tích đồng thời quan hệ kinh tế giữa các ngành, trên phương diện phân phối và hình thành sản phẩm, phân tích được các quan hệ cân đối hiện vật cũng như giá trị, phân tích các tác động dây chuyền trong nền kinh tế... Bảng I/O là một mô hình cân bằng tiêu biểu.

Với nội dung và ưu điểm như vậy nên mô hình I/O không ngừng được phát triển và hoàn thiện. Đến nay, hầu hết các nước đều ứng dụng mô hình này ở mức vĩ mô cũng như vi mô. Sau đây sẽ điểm lại quá trình phát triển của mô hình này.

1. Biểu đồ Francois Quesnay (1758, 1766)

Fr. Quesnay - nhà kinh tế học Pháp - khi nghiên cứu quá trình phân phối sản phẩm giữa ba tầng lớp: Nông dân, tiểu thương và địa chủ - đã đưa ra mô hình giản đơn như sau: Fr. Quesnay giả thiết rằng: Trong xã hội chỉ có nông dân sản xuất ra của cải; Vua chúa, địa chủ... không sản xuất, chỉ hưởng lãi; tầng lớp tiểu thương không tạo ra lãi, vì vậy không nằm trong hệ thống sản xuất. Trong một năm nông dân sản xuất ra 5 tỷ Livres (đơn vị tiền tệ cũ của Pháp). Trong 5 tỷ này:

Nông dân dùng một tỷ để mua nguyên liệu, 1 tỷ dùng để trả tiền công lao động (tiền công) và cũng là khoản tiêu dùng cuối cùng của nông dân; 1 tỷ để mua dụng cụ từ tiểu thương (khấu hao), khoản này cũng tạo ra tiêu dùng cuối cùng của tiểu thương; trả cho địa chủ, đóng thuế cho vua, nhà thờ 2 tỷ. Về tiền thu: Đối với địa chủ nhận được 2 tỷ, số tiền này dùng để trả cho: Lương thực, thực phẩm 1 tỷ và 1 tỷ trả cho tiểu thương về các đồ dùng cần thiết khác dưới dạng tiền công. Như vậy đã tạo ra tiêu dùng cuối cùng của tiểu thương 1 tỷ và đầu tư 1 tỷ.

Fr. Quesnay đã xây dựng "công thức số học" sau đây:

Công thức số học: Tổng giá trị tài sản xuất: 5 tỷ.

	Đầu tư hàng năm của nông dân	Thu của g/c địa chủ, thuế đóng cho vua chúa, nhà thờ	Đầu tư của tiểu thương
Chi phí tạo ra thu nhập	2 1 1 1	2	1 1 1
Trong đó: Chi phí cho đầu tư	2		
Tổng cộng	**5**		**2(1 tỷ đầu tư năm sau)**

Từ sơ đồ trên, ta có bảng sau đây:

Tiêu dùng sản xuất	Tiêu dùng nội bộ		Tiêu dùng và lãi				Tổng
	ND	ĐC	ND	ĐC	TT	Đầu tư	
Nông dân	1	1	1	1	1	0	5
Địa chủ	0	0	0	0	1	1	2
Khấu hao	1	0					
Lao động	1	1					
Thuế	2	0					
Tổng	**5**	**2**					**7**

Biểu đồ kinh tế của Fr. Quesnay có thể được biểu diễn bằng mô hình I/O trên đây. Mặc dù giả thiết của Fr.Quesnay không đúng, nhưng Karl Marx, đã đánh giá rất cao cống hiến của Fr.Quesnay. Theo Karl Marx, thiên tài của Fr.Quesnay là ở chỗ: Từ những hành vi kinh tế riêng lẻ, không được thể hiện bằng con số, ông đã nghiên cứu các hành vi ấy dưới giác độ tổng quan, dưới dạng lượng, đã cố gắng diễn đạt lưu thông phân phối hàng hoá giữa người sản xuất và tiêu dùng.

2. Mô hình tái sản xuất của Karl Marx

Khi nghiên cứu quá trình tái sản xuất xã hội, Karl Marx đã chia toàn bộ nền sản xuất thành hai khu vực: Sản xuất ra tư liệu sản xuất và sản xuất ra vật phẩm tiêu dùng. Giữa hai khu vực trao đổi sản phẩm với nhau theo những tỷ lệ nhất định. Tổng giá trị sản lượng của mỗi khu vực và toàn xã hội là:

$$X_1 = C_1 + V_1 + M_1 \text{ (khu vực I)}$$

$$X_2 = C_2 + V_2 + M_2 \text{ (khu vực II)}$$

Trong tái sản xuất giản đơn, khối lượng tư liệu sản xuất **ở mức đủ** bù đắp hao phí về mãy móc, thiết bị trong cả hai khu vực, **không** còn lại sản phẩm để tích luỹ, tức là: $X_1 = C_1 + C_2$; vật **phẩm tiêu** dùng cũng sản xuất chỉ đủ dùng trong hai khu vực, do **đó:**

$$\mathbf{X_2} = V_1 + M_1 + V_2 + M_2$$

$$= \mathbf{C_2} + V_2 + M_2. \text{ Tức là: } C_2 = V_1 + M_1.$$

Có thể **mô tả nh**ững phân tích của Karl Marx bằng bảng dưới đây:

Khu vực	Chi phí nội bộ		Sản phẩm cuối cùng		X_i
	I	II	Tiêu dùng sản xuất	Tiêu dùng phí sản xuất	Σ
I	C_1	C_2	0	0	X_1
II	0	0	0	X_2	X_2
V_j	V_1	V_2	năm t		
M_j	M_1	M_2			
X_j	X_1	X_2			

Có thể nói rằng cơ sở lý luận của bảng I/O chính là lý thuyết về tái sản xuất của Marx. Tuy nhiên công lao xây dựng bảng I/O về mặt lý luận và thực tiễn trước hết phải kể đến Wassily Leontief.

Ngày nay, do sự phát triển của các phương pháp toán học, kỹ thuật tính toán, phương pháp I/O đã được vận dụng một cách nhanh chóng và phổ biến ở hầu hết các nước: Liên xô (1961) đã xây dựng bảng gồm 181 ngành, Ba Lan (1958), CHDC Đức (1961), Bungari (1961), Hungari (1959), Tiệp Khắc (1962), Mỹ (1941), Anh (1948), Pháp, Nhật (1951), Mexico (1985), Sudan (1987),... Đã có nhiều hội nghị khoa học quốc tế về mô hình và các vấn đề riêng của bảng I/O, như Hội thảo quốc tế tại Gionevơ 8-12/1/1968 có 160 các nhà khoa học của 35 nước tham gia. Do điều kiện kinh tế, kỹ thuật của từng nước mà quy mô bảng I/O ở các nước rất khác nhau. Đối với các nước kém phát triển, bảng I/O được xây dựng chủ yếu dựa vào hệ thống tài khoản quốc gia (SNA).

Ở Việt Nam từ những năm 60, mô hình I/O đã được đưa vào giảng dạy ở một số trường đại học (Kinh tế Kế hoạch, Bách khoa,...). Một số bảng I/O đã được thử nghiệm xây dựng: Bảng I/O cho một ngành (Bộ Công nghiệp nhẹ, UBKH Nhà nước,

Viện toán học); Bảng I/O cho khu công nghiệp Việt Trì (Đại học Bách khoa, Viện phân vùng quy hoạch TW, UBKH nhà nước); Bảng I/O cho cấp huyện (ĐH Kinh tế Quốc dân, 1971 - 1974).

Năm 1980 Tổng cục Thống kê đã xây dựng bảng I/O cho 24 ngành. Trong thời gian 1979 - 1980, Viện Toán kinh tế đã xây dựng bảng I/O cho 25 sản phẩm chủ yếu. Năm 1983 UB vật giá Nhà nước và Trung tâm phân tích hệ thống (Viện QLKTTW) đã ứng dụng cấu trúc bảng I/O, mô phỏng xử lý vấn đề tác động lẫn nhau trong quá trình xác định hệ thống giá cả. Năm 1984 - 1986, Viện phân vùng QHTW và Viện toán học đã thử nghiệm xây dựng bảng I/O cho các vùng kinh tế Bắc bộ, Nam bộ với 6 ngành kinh tế.

Với việc tiến hành dự án VIE/88/032 về xây dựng và thực hiện hệ thống SNA ở Việt Nam, Tổng cục Thống kê đã xây dựng bảng I/O 1989 theo giá sản xuất gồm 53 ngành và bảng gộp 6 ngành. Cùng với việc xây dựng và hoàn thiện hệ thống SNA, phương pháp I/O sẽ được sử dụng trong phân tích, dự báo và đặc biệt được ghép nối với các mô hình kinh tế lượng khác. Hiện nay, hàng năm Tổng cục thống kê và một số cơ quan nghiên cứu đều xây dựng và thực hiện các phân tích kinh tế trên bảng I/O.

II. MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ PHƯƠNG PHÁP LUẬN XÂY DỰNG BẢNG VÀO - RA

1. Ngành thuần tuý (ngành sản phẩm)

Mô hình I/O coi nền kinh tế quốc dân là một thể thống nhất, gồm n ngành sản xuất thuần tuý có quan hệ mật thiết với nhau. Các đơn vị được xếp vào cùng một ngành sản xuất là các

đơn vị: Sản xuất ra sản phẩm giống nhau về công dụng kinh tế có thể thay thế hoàn toàn cho nhau, sử dụng các loại nguyên, vật liệu tương tự nhau và quá trình công nghệ giống nhau. Như vậy có thể xem có sự tương ứng một - một giữa ngành thuần tuý và sản phẩm. Về mặt nguyên tắc với mỗi sản phẩm ta có một ngành thuần tuý.

Từ khái niệm ngành thuần tuý có thể rút ra một số nhận xét sau đây:

- Các ngành thuần tuý không có sẵn trên thực tế. Các ngành kinh tế theo hệ thống phân ngành của mỗi quốc gia bao gồm nhiều ngành thuần tuý và ngành thuần tuý có thể nằm trong nhiều ngành kinh tế khác nhau. Do đó những thông tin cần thiết cho bảng I/O không có sẵn. Điều này gây ra các khó khăn cho việc xây dựng bảng I/O.

- Do có thể xem mỗi ngành thuần tuý ứng với một loại sản phẩm, trên thực tế số sản phẩm khác nhau là rất nhiều cho nên số ngành thuần tuý là rất lớn. Điều này gây ra khó khăn cho việc thu thập số liệu và xử lý số liệu. Do vậy tuỳ theo mục tiêu nghiên cứu, tuỳ theo khả năng cung cấp số liệu người ta đưa ra số ngành thích hợp. Từ đó đòi hỏi phải nhóm gộp các sản phẩm. Khi nhóm gộp các sản phẩm người ta sử dụng các sản phẩm đặc trưng. Chẳng hạn ngành sản xuất lương thực có: Lúa, ngô, khoai,... Người ta dùng lúa là sản phẩm đặc trưng và quy đổi các sản phẩm khác ra lúa. Ngành chế tạo máy sản xuất ra nhiều loại động cơ có công suất khác nhau, người ta phải dùng một loại động cơ làm sản phẩm đặc trưng. Khi nhóm gộp các sản phẩm cần phải tuân thủ những quy tắc, các tiêu chuẩn nhất định.

Ngày nay phân loại ngành trong bảng I/O dựa vào phân loại hoạt động sản xuất hay phân ngành kinh tế trong hệ thống

tài khoản quốc gia SNA (System of National Accounts) được gọi tắt là ISIC (International Standard Industrial) Classification of all Economic Activities) do Liên hợp quốc đưa ra. Cho đến nay đã ban hành lần thứ ba ISIC vào năm 1989, ký hiệu là ISIC-3. Kèm theo ISIC, Liên hợp quốc cũng ban hành bảng phân loại sản phẩm chủ yếu CPC (Central Product Classification). Phân loại CPC dựa vào đặc trưng về vật chất của sản phẩm hay dựa trên đặc điểm của dịch vụ. Mỗi hàng hoá trong CPC do một ngành trong ISIC tạo ra và ngược lại mỗi ngành trong ISIC chỉ sản xuất ra một loại sản phẩm. Tuy nhiên, không phải lúc nào ta cũng có thể tìm được quan hệ một - một giữa ISIC và CPC, nói chung một ngành sản xuất hơn một loại sản phẩm. Sau đây là bảng phân ngành cấp I theo ISIC - 3 và bảng CPC của Liên hợp quốc.

Bảng phân ngành cấp I theo ISIC-3

Mã	Tên ngành
A(1)	Nông nghiệp, săn bắn và lâm nghiệp
B(2)	Ngư nghiệp
C(3)	Khai thác mỏ
D(4)	Chế biến
E(5)	Cung cấp điện, ga, nước
F(6)	Xây dựng
G(7)	Bán buôn, bán lẻ, sửa chữa xe có động cơ, đồ dùng cá nhân và gia đình
H(8)	Khách sạn và nhà hàng
I(9)	Vận tải, lưu kho và thông tin liên lạc
J(10)	Trung gian tài chính
K(11)	Các hoạt động cho thuê và kinh doanh bất động sản
L(12)	Quản lý nhà nước, an ninh quốc phòng và bảo hiểm xã hội bắt buộc

Mã	Tên ngành
M(13)	Giáo dục
N(14)	Y tế và sự nghiệp xã hội
O(15)	Các hoạt động dịch vụ cá nhân, xã hội và hoạt động phục vụ công cộng khác
P(16)	Hoạt động làm thuê cho các hộ tư nhân
Q(17)	Hoạt động của các tổ chức và đoàn thể quốc tế

Bảng phân ngành trên gồm ba nhóm ngành: Nhóm khái thác nguồn tự nhiên; nhóm chế biến các sản phẩm khai thác từ nguồn tự nhiên và nhóm các ngành dịch vụ.

Từ bảng phân ngành cấp I được chia ra 60 ngành cấp II và từ các ngành cấp II chia ra 159 ngành cấp III, từ đó chia thành 290 ngành cấp IV.

10 nhóm sản phẩm cấp I trong bảng phân loại CPC của SNA

STT	Tên sản phẩm
1	Sản phẩm nông, lâm, ngư nghiệp
2	Khoáng sản, điện, khí đốt và nước
3	Thực phẩm, đồ uống, đồ hút, vải, đồ mặc và sản phẩm bằng da thú
4	Hàng hoá có thể vận chuyển được từ sản phẩm bằng kim loại máy móc và thiết bị
5	Sản phẩm kim loại, máy móc và thiết bị
6	Công trình xây dựng và đất đai
7	Các dịch vụ: Thương mại, khách sạn và nhà hàng
8	Các dịch vụ: Vận tải, lưu kho và thông tin liên lạc
9	Các dịch vụ: kinh doanh, nông nghiệp, mỏ và chế biến
10	Các dịch vụ: Cá nhân, cộng đồng và xã hội

Từ 10 nhóm sản phẩm chủ yếu này chia thành 56 sản phẩm cấp II.

Ở Việt Nam ngày 27/10/1993 Chính phủ đã ban hành

nghị định về việc phân ngành cho nền kinh tế nước ta. Hệ thống ngành mới này có hiệu lực từ 1/1/1994. Theo nghị định này Việt Nam có 20 ngành sản xuất cấp I:

1. Nông nghiệp và lâm nghiệp;
2. Thuỷ sản (nuôi trồng và khái thác);
3. Khai mỏ, khai khoáng;
4. Chế biến;
5. Sản xuất và phân phối điện, khí đốt và nước;
6. Xây dựng;
7. Thương nghiệp và sửa chữa vật phẩm tiêu dùng;
8. Khách sạn;
9. Vận tải, kho bãi và thông tin liên lạc;
10. Tài chính, tín dụng;
11. Hoạt động khoa học công nghệ;
12. Kinh doanh tài sản và dịch vụ tư vấn;
13. Quản lý Nhà nước, an ninh quốc phòng;
14. Giáo dục, đào tạo;
15. Y tế và hoạt động cứu trợ xã hội;
16. Văn hoá, thể thao;
17. Hoạt động Đảng, đoàn thể, hiệp hội;
18. Hoạt động phục vụ cá nhân và cộng đồng;
19. Hoạt động làm thuê công việc gia đình trong các hộ tư nhân;
20. Hoạt động của các tổ chức và đoàn thể quốc tế.

2. Giá trị sản xuất GO (Gross Output)

Giá trị sản xuất là một chỉ tiêu tổng hợp được tính bằng giá trị sản lượng của tất cả các ngành. Khi tính riêng cho từng ngành ta sẽ có giá trị sản xuất của ngành. Giá trị sản

xuất được tính theo những nguyên tắc nhất định, các nguyên tắc này được trình bày đầy đủ trong SNA. Có thể tóm tắt cách tính giá trị sản xuất của các ngành như sau:

Đối với các ngành sản xuất hàng hoá bán trên thị trường:

Giá trị sản xuất = Doanh thu bán hàng + Giá trị hàng hoá sử dụng khác + Giá trị thay đổi tồn kho

Thương nghiệp:

Giá trị sản xuất = Doanh thu bán hàng + Giá trị hàng hoá sử dụng khác + Giá trị thay đổi tồn kho – Nguyên giá hàng bán.

Các ngành dịch vụ: Giá trị sản xuất = Doanh thu

Các ngành nhận nguồn vốn từ ngân sách nhà nước:

Giá trị sản xuất = Tổng các nguồn kinh phí do ngân sách cấp – Các khoản chi có tính chất đầu tư tích luỹ tài sản.

3. Nhu cầu (chi phí) trung gian (intermediate demand)

Hàng hoá và dịch vụ được sử dụng cho mục đích của sản xuất được gọi là nhu cầu trung gian. Nhu cầu trung gian bao gồm nguyên, nhiên, vật liệu, bán thành phẩm và các dịch vụ làm đầu vào cho sản xuất, hỗ trợ mua, bán, vận tải, bưu điện,... Các hàng hoá và dịch vụ trong nhu cầu trung gian hoặc là được biến đổi để tạo ra sản phẩm mới, hoặc là được sử dụng hết trong quá trình sản xuất.

Nhu cầu trung gian không bao gồm khấu hao tài sản cố định. Khấu hao tài sản cố định là một yếu tố của phần giá trị gia tăng.

4. Nhu cầu cuối cùng (final uses or final demand)

Hàng hoá và dịch vụ của các ngành sau khi dùng một phần cho nhu cầu trung gian, phần còn lại gọi là nhu cầu cuối

cùng. Căn cứ vào mục đích sử dụng người ta chia thành các bộ phận sau đây:

Tiêu dùng (TDCC): Hàng hoá và dịch vụ dùng để đáp ứng các nhu cầu ăn, mặc, ở, đi lại... gọi là tiêu dùng cuối cùng. Phần tiêu dùng cuối cùng có thể chia chi tiết thành tiêu dùng của các hộ gia đình và tiêu dùng của chính phủ.

Tích luỹ tài sản (TLTS) hay đầu tư bao gồm: Tích luỹ tài sản cố định, hàng tồn kho, tích luỹ tài sản quý hiếm. Tích luỹ tài sản có thể chia chi tiết thành đầu tư của các hộ gia đình và đầu tư của Chính phủ.

Xuất khẩu (XK): Bao gồm xuất khẩu hàng hoá và dịch vụ.

5. Giá trị gia tăng (value added)

Giá trị gia tăng là phần còn lại của giá trị sản xuất sau khi trừ đi chi phí trung gian. Nó chính là phần giá trị mới do lao động tạo ra và phần khấu hao. Như vậy về cơ cấu nó bao gồm: Tiền công của lao động, Thuế sản xuất và thuế hàng hoá trừ đi trợ cấp, Khấu hao và Thặng dư sản xuất.

Đầu vào các yếu tố sơ cấp (primary factors input): Nếu xét vai trò của các yếu tố trong toàn bộ quá trình tạo ra sản phẩm, các yếu tố của giá trị gia tăng còn được gọi là **đầu vào các yếu tố sơ cấp.** Các yếu tố này được gọi như vậy vì chúng được xác định bên ngoài các ngành, hay nói cách khác chúng là biến ngoại sinh.

6. Các giả thiết cơ bản

- Đồng nhất về mặt công nghệ: Mỗi ngành chỉ sản xuất một sản phẩm thuần nhất và sử dụng các yếu tố đầu vào cũng thuần nhất.

- Đồng nhất về mặt sản phẩm: Sản phẩm của các ngành

không thể thay thế cho nhau. Trong phạm vi từng ngành thì các sản phẩm có thể thay thế hoàn toàn cho nhau.

- Công nghệ tuyến tính, cố định: Quá trình sản xuất được giả thiết là có các định mức kinh tế, kỹ thuật không đổi và tổng chi phí của mỗi ngành là một hàm tuyến tính của các yếu tố sản xuất.

- Hiệu quả dây chuyền: Hiệu quả sản xuất trong một ngành là do hiệu quả sản xuất trong ngành này và hiệu quả của các ngành khác tạo ra.

7. Phân loại bảng vào - ra

Căn cứ vào hình thái biểu hiện của các chỉ tiêu trong bảng I/O người ta có bảng cân đối dạng hiện vật hoặc giá trị.

Căn cứ yếu tố thời gian có hay không có trong mô hình người ta có bảng cân đối tĩnh hoặc động.

Căn cứ vào phạm vi địa lý, xây dựng bảng I/O người ta có bảng cân đối khu theo vùng lãnh thổ, theo ngành hoặc xí nghiệp,...

Ngoài ra còn nhiều loại bảng khác: Bảng I/O đóng, mở, ngắn hạn, dài hạn...

III. BẢNG VÀO - RA CỦA MỘT SỐ NƯỚC

Do điều kiện kinh tế - xã hội của các nước khác nhau, do mục đích cụ thể của việc xây dựng bảng I/O khác nhau, nên các nước (hoặc nhóm nước) có các bảng không giống nhau.

1. Bảng vào - ra của SUDAN

Bảng I/O của SUDAN năm 1981 - 1982 được xây dựng dựa trên SNA theo giá sản xuất. Trong bảng này người ta đã tách phần nhập khẩu thành một dòng riêng, xếp vào phần giá trị gia tăng (lý do sẽ được giải thích ở phần sau). Theo bảng này có 10 ngành, nhu cầu cuối cùng không có phần tài sản quý hiếm.

Bảng 1: Bảng I/O của Sudan

	Nhu cầu trung gian									
	Nông nghiệp	Khai thác mỏ	Gia công	Điện & nước	Xây dựng	Thương mại	Bưu điện	Bảo hiểm	Dịch vụ...	Ngành khác
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
Nông nghiệp	158,4	0,0	662,5	3,0	201,0	101,0	207,0	56,0	18,0	6,0
Khái thác mỏ	0,1	0,1	2,0	1,0	0,4	0,1	0,1	0,0	0,0	0,0
Gia công	95,0	0,1	334,0	7,0	99,0	73,0	95,0	31,0	5,0	9,0
Điện & nước	13,0	0,1	8,0	2,0	3,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
Xây dựng	12,0	0,0	70,0	4,0	9,0	4,0	3,0	6,0	1,0	5,0
Thương mại, nhà hàng, Hotel	40,0	0,8	77,0	3,0	18,0	112,0	19,0	33,0	2,0	14,0
Vận tải, bưu điện	1,0	0,0	2,0	1,0	0,2	2,0	2,0	1,0	0,2	0,2
Tài chính, bảo hiểm	52,0	0,5	25,0	5,0	18,0	154,0	48,0	112,0	5,0	0,6
Dịch vụ cộng đồng	7,0	0,0	12,0	3,0	7,0	12,0	11,0	23,0	15,0	0,0
Ngành khác	2,0	0,0	2,0	2,0	1,0	2,0	3,0	4,0	2,0	0,0
SUBCON	380,5	1,6	1194,5	31,0	356,6	461,1	389,1	267,0	49,2	35,8
Nhập khẩu	250,6	0,0	145,0	7,0	11,0	18,0	16,0	10,0	0,0	0,0
Tiền công	680,2	2,4	159,4	66,7	184,3	343,3	280,9	84,3	47,6	78,3
Khấu hao	72,5	0,4	104,6	7,0	20,4	26,6	91,1	259,8	5,7	0,9
Thuế gián thu	18,0	0,0	15,0	0,0	1,2	6,0	3,0	2,0	0,0	0,0
Thuế trực thu	4,4	0,1	71,3	0,0	2,5	10,1	5,1	2,2	1,4	0,0
Lợi nhuận	1813,8	0,8	194,9	2,7	173,5	526,4	326,7	435,3	46,8	0,0
SUBTOT	2839,5	3,7	690,2	83,4	392,9	930,4	722,8	793,6	101,5	79,2
GVAOUT	3220,0	5,3	1884,7	114,4	749,5	1391,5	1111,9	1060,6	150,7	115,0

1981-1982 (L.S. millions)

	Nhu cầu cuối cùng							
	Tiêu dùng cc		Đầu tư		Tồn kho	Xuất khẩu	Tổng (12-17)	Tổng (11+18)
Tổng (1-10)	Hộ gia đình	Chính phủ	Tư nhân	Chính phủ				
(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)
1412,9	951,4	1,1	0,0	17,8	442,6	393,9	1806,8	3219,7
3,8	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	3,9
748,1	593,5	51,9	168,1	71,3	-21,2	275,7	1139,3	1887,4
31,1	60,0	21,6	0,0	0,0	0,0	0,0	81,6	112,7
114,0	43,0	29,4	353,0	210,7	0,0	0,0	636,1	750,1
318,8	1121,3	40,8	0,,0	0,0	-89,6	0,0	1072,5	1391,3
9,6	741,0	36,1	259,9	51,8	0,0	14,8	1103,6	1113,2
420,1	596,8	39,9	2,7	0,0	0,0	0,5	639,9	1060,0
90,0	59,0	0,0	2,0	0,0	0,0	0,0	61,0	151,0
18,0	68,8	25,0	2,5	0,0	0,0	0,0	96,3	114,3
3166,4	4234,8	245,9	788,2	351,6	331,8	684,9	6637,2	9803,6
457,6	1079,9	29,1	127,8	15,0	0,0	0,0	1251,8	1709,4
1927,4	0,0	464,7	0,0	0,0	0,0	0,0	464,7	2392,1
589,0	0,0	119,0	0,0	0,0	0,0	0,0	119,0	708,0
45,2	339,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	339,4	384,6
97,1	45,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	45,2	142,3
3520,9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3520,9
6637,2	1464,5	612,8	127,8	15,0	0,0	0,0	2220,1	8875,3
9803,6	5699,3	858,7	916,0	366,6	331,8	684,9	8857,3	

2. Bảng vào - ra của Việt Nam

Như phần trên đã giới thiệu, ở Việt Nam đã có nhiều bảng I/O, do nhiều cơ quan, nhiều tổ chức lập ra. Khi bắt đầu xây dựng và triển khai hệ thống kế toán mới, Tổng cục Thống kê đã xây dựng bảng I/O gồm 53 ngành cho toàn bộ nền kinh tế quốc dân theo số liệu năm 1989. Trên cơ sở này đã xây dựng bảng I/O gộp gồm 6 ngành, bảng này sẽ được giới thiệu kỹ trong phần sau.

Bảng 2: **Bảng I/O gộp của Việt Nam, 1989, theo giá sản xuất**

Đơn vị: Tỷ VND

	Nhu cầu trung gian						Σ	Nhu cầu cuối cùng				Σ
	1	2	3	4	5	6		C	I	E	Σ	
CN	6036	1635	1184	566	491	1434	11346	6457	739	3429	10625	21971
NN,LN	939	2949	26	83	4	69	4070	8408	193	2168	10767	14837
XDCB	62	22	2	43	1	85	215	313	1698	66	2077	2292
TN, VT	301	78	53	21	95	62	610	2623	143	674	3440	4050
GT, BĐ	151	57	86	23	8	73	398	625	44	160	829	1227
DV	333	75	58	311	17	656	1450	5934	0	202	6136	7586
Σ	7822	4816	1409	1047	616	2379	18089	24358	2817	6699	33874	51963
N. Khẩu	9337	208	0	0	8	14	9567	0	0	0	0	9567
K. hao	2601	7081	720	1121	292	2621	14436	0	0	0	0	14436
T.Lương	613	236	50	152	126	1621	2798	0	0	0	0	2798
L.Nhuận	1598	2496	113	1730	185	951	7073	0	0	0	0	7073
Σ	14149	10021	883	3003	611	5207	33874	0	0	0	0	33874
Tổng	21971	14837	2292	4050	1227	7586	51963	24358	2817	6699	33874	85837

IV. BẢNG VÀO - RA DẠNG HIỆN VẬT

1. Mô hình

Bảng I/O dạng hiện vật gồm bốn khối. Khối thứ nhất có dạng hình vuông, mô tả khối lượng sản phẩm trao đổi giữa các ngành trong nội bộ nền kinh tế. Vì vậy khối này được gọi là "Các sản phẩm trao đổi trung gian". Khối thứ hai ghi lượng lao động được sử dụng trong từng ngành. Khối thứ ba ghi sản phẩm cuối cùng và khối thứ tư ghi lao động được sử dụng trong các lĩnh vực khác và lao động chưa được sử dụng. Khối thứ ba có thể ghi chi tiết hơn bằng cách chia các sản phẩm cuối cùng cho ba mục đích: Tiêu dùng, đầu tư, xuất khẩu... Khối thứ hai có thể chi tiết thêm phần nhập khẩu. Tuy nhiên việc chi tiết thêm sẽ làm quy mô của bảng I/O tăng thêm. Sau đây là bảng I/O dạng hiện vật đơn giản nhất:

Số TT	Sản lượng	Đơn vị	Sản phẩm trung gian	Sản phẩm cuối cùng
1	Q_1	tấn	$q_{11}\ q_{12}$ ..... q_{1n}	q_1
2	Q_2	kw	$q_{21}\ q_{22}$ ..... q_{2n}	q_2
.	.			.
.	.			.
n	Q_n	m^3	$q_{n1}\ q_{n2}$ ..... q_{nn}	q_n
	Q_0	Ng*ng	$q_{01}\ q_{02}$ ..... q_{0n}	q_0

Trong đó:

Q_i: Sản lượng sản phẩm ngành thứ i;

q_i: Sản phẩm cuối cùng của ngành i;

q_{ij}: Số sản phẩm ngành j mua từ ngành i;

Q_0: Tổng số lao động (đơn vị quy đổi - chẳng hạn người - ngày)

q_{0j}: Lượng lao động được sử dụng trong ngành j;

q_0: Số lao động sử dụng trong các lĩnh vực khác.

Từ bảng ta có: $Q_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} + q_i \qquad i = \overline{1,n}$ (1)

Phương trình (1) là phương trình phân phối sản phẩm dạng hiện vật trong nền kinh tế quốc dân. Phương trình này cho biết tình hình phân bố và sử dụng sản phẩm của các ngành kể cả cho mục đích tiêu dùng cuối cùng.

$$Q_0 = \sum_{j=1}^{n} q_{0j} + q_0 \qquad (2)$$

Phương trình (2) là phương trình sử dụng lao động. Nó cho biết tình hình phân bố và sử dụng lao động trong các ngành.

2. Hệ số chi phí trực tiếp dạng hiện vật

Các phương trình (1) và (2) có thể biến đổi như sau:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_{ij}}{Q_j} Q_j + q_i \qquad i = \overline{1,n}$$

Đặt: $\alpha_{ij} = \frac{q_{ij}}{Q_j} \qquad \forall i,j$

Khi đó: $Q_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} Q_j + q_i \qquad i = \overline{1,n}$;

Hay $Q_i - \alpha_{ii} Q_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \alpha_{ij} Q_j = q_i \qquad \forall i = \overline{1,n}$

Đặt: $Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \Lambda \\ Q_n \end{bmatrix}$; $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \Lambda \\ q_n \end{bmatrix}$; $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\ldots\ldots\ldots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\ldots\ldots\ldots\alpha_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2}\ldots\ldots\ldots\ldots\alpha_{nn} \end{bmatrix}$

và E là ma trận đơn vị, ta có thể viết (1) dưới dạng ma trận sau đây:

$$(E - \alpha)\, Q = q \qquad (1')$$

α_{ij} được gọi là hệ số chi phí trực tiếp dạng hiện vật. Nó cho biết để có một đơn vị sản phẩm ngành j thì ngành i phải cung cấp trực tiếp cho ngành này một lượng sản phẩm là α_{ij} đơn vị. Người ta gọi ma trận $\alpha = (\alpha_{ij})_{n*n}$ là ma trận hệ số chi phí trực tiếp hay ma trận hệ số kỹ thuật (technical coefficients), ma trận Leontief dạng hiện vật.

Đặt : $\beta_{0j} = \dfrac{q_{0j}}{Q_j}$ $\forall j;$

$\beta = (\beta_{01}, \beta_{02}, ..., \beta_{0n})$ - vectơ hệ số sử dụng lao động.

Khi đó (2) được viết như sau:

$$Q_0 = \sum_{j=1}^{n} q_{0j} + q_0 \quad \text{hay } Q_0 = \sum_{j=1}^{n} \beta_{0j} Q_j + q_0 \qquad (2')$$

Thí dụ 2.1: Cho bảng I/O dạng hiện vật, năm t, gồm 3 ngành như sau:

Sản lượng	Sản phẩm trung gian			Sản phẩm c.c
100	20	10	8	62
50	10	10	16	14
40	10	10	8	12
Lao động	10	10	4	

a. Hãy tính ma trận hệ số kỹ thuật.

b. Hãy tính vectơ hệ số sử dụng lao động.

c. Hãy giải thích ý nghĩa kinh tế của a_{21}.

Ma trận hệ số kỹ thuật được tính như sau:

Dựa vào công thức $\alpha_{ij} = \dfrac{q_{ij}}{Q_j}$ $\forall i, j = 1,2,3$, ta lần lượt tính các hệ số:

$$\alpha_{11} = \frac{q_{11}}{Q_1} = 20/100 = 0,2; \alpha_{21} = \frac{q_{21}}{Q_1} = 10/100 = 0,1;$$

$$\alpha_{31} = \frac{q_{31}}{Q_1} = 10/100 = 0,1; \alpha_{12} = \frac{q_{12}}{Q_2} = 10/50 = 0,2;$$

$$\alpha_{22} = \frac{q_{22}}{Q_2} = 10/50 = 0,2; \alpha_{32} = \frac{q_{32}}{Q_2} = 10/50 = 0,2.$$

Vectơ hệ số sử dụng lao động:

$$\beta_{01} = \frac{q_{01}}{Q_1} = 10/100 = 0,1;$$

$$\beta_{02} = \frac{q_{02}}{Q_2} = 10/50 = 0,2;$$

$$\beta_{03} = \frac{q_{03}}{Q_3} = 4/40 = 0,1.$$

Như vậy ta có: $\alpha = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$

$$\beta = (0,1; 0,2; 0,1).$$

Phần tử $\alpha_{21} = 0,1$ cho biết để ngành thứ nhất sản xuất ra 1 đơn vị sản phẩm thì ngành thứ 2 phải cung cấp cho nó 0,1 đơn vị sản phẩm dưới dạng tư liệu sản xuất..

Bảng I/O dạng hiện vật có ý nghĩa quan trọng trong cung ứng vật tư trong nền kinh tế quốc dân. Nó đảm bảo các quan hệ cân đối hiện vật chủ yếu trong nền kinh tế quốc dân. Tuy nhiên, do các sản phẩm của các ngành được thể hiện dưới dạng hiện vật, nên chúng có các đơn vị đo khác nhau, điều đó hạn chế đáng kể đến việc phân tích các quan hệ tiêu thụ và hình thành sản phẩm, với tư cách là kết quả chung của nền kinh tế. Còn rất nhiều yếu tố khác: Nhập khẩu, khấu hao,..., chưa được đề cập đến. Vì vậy, cần thiết phải trình bày bảng I/O dưới dạng giá trị.

V. BẢNG VÀO - RA DẠNG GIÁ TRỊ

1. Mô hình

Giá trị sản phẩm của mỗi ngành không chỉ bao gồm các hao phí vật chất tính bằng tiền (kể cả nhập khẩu, khấu hao) và tiền lương mà còn bao gồm: Các khoản thuế, lợi nhuận.Vì vậy bảng I/O dạng giá trị có dạng như sau:

X_i - Giá trị sản xuất ngành thứ i;

x_{ij} - Giá trị sản phẩm ngành i dùng sản xuất trong ngành j;

x_i - Giá trị sử dụng cuối cùng của ngành i;

f_{ik} - Giá trị sử dụng cuối cùng của ngành i dùng cho mục đích tiêu dùng thứ k;

Y_h - Giá trị yếu tố đầu vào sơ cấp thứ h; h = 1,2,3,4;

Y_{hj} - Giá trị của yếu tố đầu vào sơ cấp h được sử dụng (hoặc phải trả, hoặc nhận được...) trong ngành j, j = 1, 2,..., n; h = 1, 2, 3, 4.

Bảng I/O dạng giá trị được trình bày ở bảng 3.

Từ bảng 3 ta rút ra các phương trình sau:

- Phương trình phân phối giá trị sản phẩm:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + f_{i1} + f_{i2} + f_{i3} + f_{i4} \qquad i = \overline{1,n}$$

Hay $$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_i \qquad i = \overline{1,n}$$

***Bảng 3:* Bảng I/O dạng giá trị**

Các ngành	Giá trị sản xuất	Nhu cầu trung gian	Tổng	Nhu cầu cuối cùng				Tổng
				TD	TLTS	XK	NK	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)=(5)+...+(8)
1	X_1	$x_{11}x_{12}.....x_{1n}$	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$	f_{11}	f_{12}	f_{13}	$-f_{14}$	x_1
2	X_2	$x_{21}x_{22}.....x_{2n}$		f_{21}	f_{22}	f_{23}	$-f_{24}$	x_2
.	.	.....						
.	.	.....						
n	X_n	$x_{n1}x_{n2}.....x_{nn}$	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	f_{n1}	f_{n2}	f_{23}	$-f_{n4}$	x_n
Các yếu tố sơ cấp	Σ	$\sum_{i=1}^{n} x_{i1} ... \sum_{i=1}^{n} x_{in}$	Σ	f_1	f_2	f_3	$-f_4$	Σ
Lao động	Y_1	$y_{11}y_{12}.....y_{1n}$	$\sum_{j=1}^{n} y_{1j}$					$\sum_{j=1}^{n} y_{1j}$
Khấu hao	Y_2	$y_{21}y_{22}.....y_{2n}$						
Thuế	Y_3	$y_{31}y_{32}.....x_{3n}$						
Lợi nhuận	Y_4	$y_{41}y_{42}.....x_{4n}$	$\sum_{j=1}^{n} y_{nj}$					$\sum_{j=1}^{n} y_{4j}$
Σ	$Y_1+...+Y_4$	$\sum_{i=1}^{n} y_{i1} ... \sum_{i=1}^{n} y_{in}$						
GTSX	$X_1+...+X_n$	$X_1.....X_n$						

Trong đó $x_i = f_{i1} + f_{i2} + f_{i3} - f_{i4}$, $i = 1, 2,..., n$.

Phương trình phân phối sản phẩm này chính là phương trình:

Giá trị sản xuất = Chi phí trung gian + Tiêu dùng cuối cùng + Đầu tư + Xuất khẩu – Nhập khẩu.

Trong bảng này chỉ xét nhập khẩu sản phẩm cạnh tranh (tức là nhập khẩu các sản phẩm trong nước có sản xuất) - do vậy danh mục hàng nhập khẩu trùng với danh mục sản phẩm của bảng I/O. Nhập khẩu không cạnh tranh (hay nhập các mặt hàng không sản xuất trong nước) không được xem xét. Phần nhập khẩu có dấu âm bởi vì các ngành nhập khẩu hàng hoá và dịch vụ đó là một trong các đầu vào của sản xuất. Phần này đã nằm trong giá trị sản xuất của các ngành.

- Phương trình hình thành (cơ cấu) giá trị sản phẩm:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{h=1}^{4} y_{i_h} \qquad j = \overline{1,n} \qquad (4)$$

Như vậy bảng I/O dạng giá trị không chỉ cho biết quá trình phân phối giá trị sản phẩm mà còn cho biết quá trình hình thành giá trị sản phẩm. Từ (3) và (4) ta suy ra:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{4} y_{hj} \qquad (5)$$

Bây giờ ta xem xét nội dung kinh tế của vế trái và vế phải (5). Tổng giá trị nhu cầu cuối cùng $\sum_{i=1}^{n} x_i$ dùng cho tiêu dùng (của các hộ gia đình (C), chi tiêu của Chính phủ (G)), tích luỹ (I), xuất khẩu thuần (E – M), nó chính là GDP tính theo phương pháp sử dụng sản phẩm (The expenditure approach).

$\sum_{i=1}^{4} Y_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{4} y_{hj}$ là tổng giá trị gia tăng, nó cũng chính là GDP tính theo phương pháp sản xuất (the production approach).

- Nhu cầu cuối cùng về tiêu dùng cuối cùng, tích lũy tài sản, xuất khẩu và nhập khẩu:

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

2. Bảng vào - ra dạng giá trị tách riêng sản phẩm nhập khẩu

Bảng I/O trình bày ở mục (1) trên đây là bảng I/O tiêu chuẩn dựa trên SNA. Từ dạng cơ bản này có nhiều biến dạng khác. Đối với các nước kém phát triển, nhập khẩu thường lớn hơn so với xuất khẩu. Để phân tích sâu ảnh hưởng của nhập khẩu, người ta thêm vào phần giá trị gia tăng dòng nhập khẩu và do đó ở phần nhu cầu cuối cùng bỏ đi phần này. Ngoài ra cũng còn một lý do nữa là thu thập số liệu. Một ngành nào đó nhập khẩu một lượng hàng hoá hay dịch vụ, khi bán sản phẩm của mình cho các ngành khác để sử dụng với tư cách đầu vào của sản xuất thì khó tách được phần nhập khẩu Bảng 4 trình bày bảng I/O tách riêng dòng nhập khẩu.

Trong bảng 4:

z_1, z_2, z_3 là lượng nhập khẩu dùng cho tiêu dùng, tích luỹ tài sản và xuất khẩu.

V chính là toàn bộ tiêu dùng cuối cùng, tích luỹ tài sản và xuất khẩu.

Bảng 4: Bảng I/O tách riêng dòng nhập khẩu

Các ngành	Giá trị sản xuất	Tiêu dùng trung gian	Tổng	Tiêu dùng cuối cùng			Tổng
				TD	TLTS	XK	x_i
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(9)=(5)+..+(7)
1	X_1	$x_{11}x_{12}$.....x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$	f_{11}	f_{12}	f_{13}	x_1
2	X_2	$x_{21}x_{22}$.....x_{2n}		f_{21}	f_{22}	f_{23}	x_2
.	.	.....					
.	.	.....					
n	X_n	$x_{n1}x_{n2}$.....x_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	f_{n1}	f_{n2}	f_{n3}	x_n
Các yếu tố sơ cấp	Σ	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$ ... $\sum_{j=1}^{n} x_{in}$	Σ	f_1	f_2	f_3	Σ
Nhập khẩu	Y_1	$y_{11}y_{12}$.....y_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} y_{1j}$	z_1	z_2	z_3	
Lao động	Y_2	$y_{21}y_{22}$.....y_{2n}					
Khấu hao	Y_3	$y_{31}y_{32}$.....x_{3n}					
Thuế	Y_4	$y_{41}y_{42}$.....x_{4n}	$\sum_{j=1}^{n} y_{5j}$				
Lợi nhuận	Y_5	$y_{51}y_{52}$.....x_{5n}					
Σ	$Y_1 + ... + Y_5$	$\sum_{i=1}^{5} y_{i1}$ ... $\sum_{i=1}^{5} y_{in}$		Z_1	Z_2	Z_3	
GTSX	$X_1 + ... + X_n$	X_1 ..... X_n		V_1	V_2	V_3	

Trong bảng này chúng ta không xét nhập khẩu cạnh tranh, hay các sản phẩm nào trong nước đã sản xuất thì không nhập khẩu nữa. Khi đó X_i $(i = \overline{1,n})$ vẫn là giá trị sản xuất như bảng 3, song các phần tử x_{ij} là lượng giá trị sản phẩm ngành i chuyển sang ngành j - hay nói khác đi đó là giao dịch sản phẩm nội địa. Tương tự các giá trị f_{ik} - cũng là giá trị sản phẩm trong nước. Với giả thiết như vậy thì nhập khẩu y_{ij} là nhập khẩu các sản phẩm trong nước không sản xuất được (nhập khẩu không cạnh tranh). Trên thực tế thì một số nước xã hội chủ nghĩa trước đây vẫn làm như vậy (chẳng hạn Liên Xô chỉ nhập các sản phẩm không sản xuất được trong nước).

Chú ý rằng: GDP = C + I + E – M, từ đó GDP + M = C + I + E, vì vậy trong bảng I/O có tách dòng nhập khẩu thì X không còn là giá trị sản xuất nữa. X = Giá trị sản xuất + Nhập khẩu.

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12} \cdots\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \cdots\cdots\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots \\ a_{n1}a_{n2} \cdots\cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

Khi đó hệ (3) được viết dưới dạng ma trận như sau:

$$X = AX + x$$

Hay $$(E - A)\,X = x. \qquad (3')$$

Thí dụ 2.2: Theo "Tình hình kinh tế Việt Nam 1986-1989 trên cơ sở SNA" (Nhà xuất bản Thống kê, HN, 1992), có bảng sau đây:

Bảng I/O gộp của Việt Nam, 1989, theo giá sản xuất

Đơn vị: Tỷ VND

	Nhu cầu trung gian						Σ	Nhu cầu cuối cùng				Σ
	1	2	3	4	5	6		C	I	E	Σ	
CN	6036	1635	1184	566	491	1434	11346	6457	739	3429	10625	21971
NN,LN	939	2949	26	83	4	69	4070	808	193	2168	1067	14837
XDCB	62	22	2	43	1	85	215	313	1698	66	2077	2292
TN, VT	301	78	53	21	95	62	610	2623	143	674	3440	4050
GT, BĐ	151	57	86	23	8	73	398	625	44	160	829	1227
DV	333	75	58	311	17	656	1450	5934	0	202	6136	7586
Σ	**7822**	**4816**	**1409**	**1047**	**616**	**2379**	**18089**	**24358**	**2817**	**6699**	**33874**	**51963**
N.Khẩu	9337	208	0	0	8	14	9567	0	0	0	0	9567
K.hao	2601	7081	720	1121	292	2621	14436	0	0	0	0	14436
T.lương	613	236	50	152	126	1621	2798	0	0	0	0	2798
L. nhuận	1598	2496	113	1730	185	951	7073	0	0	0	0	7073
Σ	**14149**	**10021**	**883**	**3003**	**611**	**5207**	**33874**	**0**	**0**	**0**	**0**	**33874**
Tổng	**21971**	**14837**	**2292**	**4050**	**1227**	**7586**	**51963**	**24358**	**2817**	**6699**	**33874**	**85837**

Bảng trên cho chúng ta biết quá trình hình thành và phân phối sản phẩm của các ngành trong nền kinh tế.

Chẳng hạn, nếu ta xem ngành công nghiệp thì giá trị sản xuất của ngành này là: 21971 tỷ (phần tử này nằm ở dòng thứ nhất, trên cột cuối cùng của bảng).

a. Giá trị sản xuất ngành công nghiệp được phân phối như sau:

Giá trị sản phẩm trung gian (11346 tỷ) và

Nhu cầu cuối cùng (10625 tỷ).

Phần giá trị sản phẩm trung gian bao gồm:

- Phần mà ngành công nghiệp giữ lại cho chính mình để sản xuất (6033 tỷ);

- Phần bán cho Nông nghiệp (1635 tỷ), bán cho Xây dựng cơ bản (1184 tỷ), bán cho Thương nghiệp vận tải (566 tỷ), bán cho Giao thông và Bưu điện (491 tỷ), bán cho Dịch vụ (1434 tỷ).

Phần nhu cầu cuối cùng (10625 tỷ) được sử dụng cho:

Tiêu dùng (6457 tỷ), Đầu tư (739 tỷ), Xuất khẩu (3429 tỷ).

b. Sản lượng của ngành công nghiệp được hình thành như thế nào?

1. Ngành Công Nghiệp phải sử dụng một lượng sản phẩm do chính mình sản xuất ra trị giá 6036 tỷ;

2. Sản phẩm mua từ Nông nghiệp và Lâm nghiệp: 939 tỷ, sản phẩm mua từ ngành Xây dựng: 62 tỷ, sản phẩm mua từ Thương nghiệp và vận tải: 301 tỷ, sản phẩm từ Giao thông và bưu điện: 151 tỷ, các Dịch vụ khác thực hiện cho ngành công nghiệp: 333 tỷ;

3. Để sản xuất, ngành Công nghiệp nhập khẩu một lượng 9337 tỷ;

Nếu như thực hiện (1) + (2) + (3) sẽ cho giá trị của nguyên, nhiên, vật liệu đã được thực hiện trong ngành công nghiệp, nó là một phần (do chưa có khấu hao) (C) trong cấu thành giá trị sản phẩm.

4. Khấu hao trong ngành: 2601 tỷ;

5. Tiền công lao động được sử dụng trong công nghiệp: 613 tỷ;

6. Lợi nhuận trong ngành: 1598 tỷ;

Nếu như thực hiện (4) + (5) + (6) sẽ cho phần giá trị giá trị gia tăng.

Trong bảng trên không có mục "Thuế" tách riêng, phần này đã được gộp vào phần khác.

Ta cũng thấy rằng: (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) = 21971.

Như vậy, ta đã có quan hệ cân đối giữa phân phối và hình thành sản phẩm:

Tổng phân phối (21971) + Tổng hình thành (21971).

GDP = Tổng giá trị sản xuất – Tổng giá trị nhu cầu trung gian

(51963 – 18089 – 9567 = 24307)

= Tổng giá trị gia tăng (33874 – 9567 = 24307)

3. Hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị

$a_{ij} = x_{ij}/X_j \forall i,j$ được gọi là hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị. Nó cho biết để có được một đơn vị giá trị sản phẩm. ngành j thì ngành i phải cung cấp trực tiếp cho ngành này một lượng sản phẩm có giá trị là a_{ij}. Kí hiệu $A = (a_{ij})_{n*n}$. A được gọi là ma trận hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị.

4. Hệ số đầu vào các yếu tố sơ cấp

Đặt: $$b_{hj} = \frac{y_{hj}}{X_j} \qquad \forall\ j = \overline{1,n};\ \forall h = \overline{1,5}.$$

Ký hiệu: $B = (b_{hj})_{5*n}$, mà trận B được gọi là ma trận hệ số đầu vào các yếu tố sơ cấp, các phần tử b_{hj} cho biết để có một đơn vị giá trị sản phẩm ngành j thì ngành này phải sử dụng trực tiếp b_{hj} đơn vị giá trị đầu vào yếu tố sơ cấp thứ h.

Khi đó ta có:

$$Y_h = \sum_{j=1}^{n} y_{hj} \qquad \forall h = \overline{1,5}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{hj}}{X_j} X_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_{hj} X_j \qquad \forall h = \overline{1,5}.$$

5. Ma trận hệ số nhu cầu cuối cùng.

Đặt $V^T = (V_1, V_2, V_3)$; $d_{ik} = \frac{f_{ik}}{V_k}$; $D = (d_{ik})_{n*3}$

Ma trận D gọi là ma trận cơ cấu nhu cầu cuối cùng.

D_{ik} cho biết để có một đơn vị nhu cầu cuối cùng thứ k, ngành i phải đóng góp bao nhiêu.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \Lambda \\ x_n \end{bmatrix} = DV, \text{ từ đó có } X = AX + DV.$$

Hay $(E - A)X = DV$

VI. HỆ SỐ CHI PHÍ TOÀN BỘ

1. Khái niệm và ý nghĩa kinh tế

Từ các phương trình (1') và (3'):

$$(E - \alpha)\, Q = q \qquad (1')$$

$$(E - A)\, X = x \qquad (3')$$

Sản phẩm cuối cùng hoặc nhu cầu cuối cùng thường là

mục tiêu của nền kinh tế, chúng là các biến ngoại sinh. Khi đó có thể xác định sản lượng hoặc giá trị sản lượng của các ngành, sao cho đáp ứng mục tiêu này và chúng được xác định bởi:

$$Q = (E - \alpha)^{-1}q \qquad (6)$$

$$X = (E - A)^{-1}x. \qquad (7)$$

Đặt:

$\theta = (E - \alpha)^{-1} = (\theta_{ij})_{n*n}$, θ được gọi là ma trận hệ số chi phí toàn bộ dạng hiện vật.

$C = (E - A)^{-1} = (c_{ij})_{n*n}$ được gọi là ma trận hệ số chi phí toàn bộ dạng giá trị.

Các ma trận hệ số chi phí toàn bộ có ý nghĩa gì?

Giả sử rằng chúng ta có (7) và biết nhu cầu cuối cùng của ngành thứ nhất là 1 đơn vị, nhu cầu cuối cùng của các ngành khác đều bằng 0, tức là cho $x^T = (1, 0, 0,..., 0)$, khi đó:

$$X = \begin{bmatrix} c_{11}\ c_{12}\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\ c_{1n} \\ c_{21}\ c_{22}\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\ c_{2n} \\ \Lambda\ \ \Lambda\ \ \Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\ \ \Lambda \\ c_{n1}c_{n2}\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\ c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \Lambda \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \Lambda \\ c_{n1} \end{bmatrix}$$

Trong trường hợp này giá trị sản xuất của mỗi ngành là các phần tử trên cột thứ nhất của mà trận hệ số chi phí toàn bộ dạng giá trị.

Một cách tổng quát, hệ số c_{ij} cho biết: Để sản xuất ra một đơn vị giá trị nhu cầu cuối cùng của ngành thứ j thì ngành thứ i phải sản xuất một lượng sản phẩm có giá trị là c_{ij}.

Hệ số θ_{ij} cho biết: Để tạo ra một đơn vị sản phẩm cuối cùng của ngành thứ j thì ngành thứ i phải sản xuất một lượng sản phẩm là θ_{ij}.

2. Một số tính chất của các ma trận hệ số chi phí trực tiếp và ma trận hệ số chi phí toàn bộ

Ma trận α và A được xây dựng từ các bảng dạng hiện vật và dạng giá trị ở trên, bao giờ cũng có:

$$0 \le \alpha_{ii} < 1; \quad 0 \le a_{ij} < 1; \quad 0 \le b_{hj} < 1;$$

$$0 \le \theta_{ij}; \quad 0 \le c_{ij}; \quad \theta_{ii} > 1; c_{ii} > 1,$$

với mọi i, j, h

và $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} + \sum_{h=1}^{5} b_{hj} = 1$

Các tính chất trên không chỉ rút ra thông qua phân tích toán học mà còn dựa trên ý nghĩa kinh tế. Chẳng hạn $c_{ii} > 1$ vì: Để sản xuất ra một đơn vị nhu cầu cuối cùng của ngành i thì ngành này phải tạo ra một lượng sản phẩm lớn một đơn vị giá trị. Điều này là hợp lý và bắt buộc về mặt kinh tế.

Thí dụ 2.3:

Giá trị	Nhu cầu trung gian			Σ	Nhu cầu cuối cùng			Σ
					C	I	E	
200	20	20	10	**50**	75	50	25	**150**
200	20	30	20	**70**	60	40	30	**130**
100	30	20	20	**70**	15	10	5	**30**
Σ	**70**	**70**	**50**	**190**	**150**	**100**	**60**	**310**
Nhập khẩu	10	20	0	**30**				**30**
Tiền lương	20	15	20	**55**				**55**
Khấu hao	10	15	10	**35**				**35**
Thuế	10	10	10	**30**				**30**
Lợi nhuận	80	70	10	**160**				**160**
Σ	**130**	**130**	**50**	**310**				**310**
GTSX	**200**	**200**	**100**	**500**	**150**	**100**	**60**	**500**

a. Hãy tính ma trận hệ số kỹ thuật.

b. Hãy tính ma trận hệ số đầu vào các yếu tố sơ cấp.

c. Hãy giải thích ý nghĩa kinh tế của a_{32}.

d. Hãy giải thích ý nghĩa kinh tế của phần tử b_{12}.

e. Hãy tính ma trận cơ cấu nhu cầu cuối cùng và giải thích ý nghĩa của d_{23}.

Ma trận hệ số kỹ thuật:

Dựa vào công thức $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \forall i, j$; ta lần lượt tính các hệ số:

$a_{11} = \frac{x_{11}}{X_1} = 20/200 = 0,2;$ $a_{21} = \frac{x_{21}}{X_1} = 20/200 = 0,1;$

$a_{31} = \frac{x_{31}}{X_1} = 30/200 = 0,15;$ $a_{12} = \frac{x_{12}}{X_2} = 20/200 = 0,1;$

$a_{22} = \frac{x_{22}}{X_2} = 30/200 = 0,15;$ $a_{32} = \frac{x_{32}}{X_2} = 20/200 = 0,1.$

Tương tự ta tính được các hệ số còn lại.

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,15 & 0,2 \\ 0,15 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Ma trận các yếu tố đầu vào sơ cấp:

$b_{11} = \frac{y_{11}}{X_1} = 10/200 = 0,05;$ $b_{12} = \frac{y_{21}}{X_2} = 20/200 = 0,1;$

$b_{13} = \frac{y_{13}}{X_3} = 0/100 = 0,;$ $b_{21} = \frac{y_{21}}{X_1} = 20/200 = 0,1;$

$b_{22} = \frac{y_{22}}{X_2} = 15/200 = 0,075;$ $b_{23} = \frac{y_{23}}{X_3} = 20/200 = 0,2.$

$$B = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,075 & 0,2 \\ 0,05 & 0,075 & 0,1 \\ 0,05 & 0,05 & 0,1 \\ 0,4 & 0,35 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Phần tử $a_{32} = 0,1$ cho biết để sản xuất ra một đơn vị gi trị sản phẩm của ngành thứ 2 thì ngành thứ nhất phải cung cấ trực tiếp cho ngành này một lượng sản phẩm có giá trị 0,1.

Phần tử $b_{12} = 0,1$ cho biết để sản xuất ra một đơn vị giá t sản phẩm của ngành thứ 2 thì ngành thứ hai phải sử dụng trực tiế một lượng sản phẩm nhập khẩu có giá trị bằng 0,1.

Ma trận cơ cấu nhu cầu cuối cùng:

$d_{11} = f_{11}/V_1 = 75/150 = 0,5;$

$d_{12} = 60/150 = 0,4;\ d_{23} = 30/60 = 0,5.$

Tương tự ta có:

$$D = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 5/12 \\ 0,4 & 0,4 & 0,5 \\ 0,1 & 0,1 & 1/12 \end{pmatrix}$$

Phần tử $d_{23} = 0,5$ cho biết để có một đơn vị xuất khẩu th ngành thứ 2 phải đóng góp 0,5 đơn vị.

VII. ,MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA BẢNG I/O TRONG PHÂN TÍCH VÀ DỰ BÁO KINH TẾ

1. Lập kế hoạch sản xuất

Giả sử rằng chúng ta có ma trận hệ số chi phí trực tiếp năm báo cáo t: $\alpha(t)$, các hệ số sử dụng lao động β_{0j} ($\beta(t)$) hoặ $A(t)$, $B(t)$.

Từ các ma trận $\alpha(t)$, $\beta(t)$ hoặc $A(t)$, $B(t)$ ta tìm được $\alpha(t+1)$, $\beta(t+1)$ và $A(t+1)$, $B(t+1)$. Thông thường khi chuyển từ t đến t + 1, tức là trong ngắn hạn thì các hệ số chi phí không thay đổi, tức là:

$\alpha(t) = \alpha(t+1)$, $\beta(t) = \beta(t+1)$, $A(t) = A(t+1)$, $B(t) = B(t+1)$. Trong trường hợp có những ứng dụng tiến bộ kỹ thuật làm cho một số hệ số thay đổi thì cần điều chỉnh các ma trận chi phí để thu được các ma trận chi phí ở thời kỳ t + 1.

Ở thời kỳ t + 1, các quan hệ cân đối sau vẫn được đảm bảo:

$$(E - \alpha(t+1))\, Q(t+1) = q(t+1) \qquad (1')$$

$$(E - A(t+1))\, X(t+1) = x(t+1). \qquad (3')$$

Thực chất (1') và (3') là một hệ thống n phương trình tuyến tính và 2n ẩn số. Từ đó các tình huống sau đây:

a. Xác định mức sản xuất của các ngành

Ở thời kỳ kế hoạch Chính phủ đưa ra yêu cầu về giá trị sản phẩm (hay sản phẩm) cuối cùng. Khi đó mỗi ngành phải sản xuất bao nhiêu để đảm bảo yêu cầu này? Điều này có nghĩa là $x(t+1)$, $q(t+1)$ là ngoại sinh; $X(t+1)$, $Q(t+1)$ là nội sinh. Từ (1') và (3'), dựa vào các ma trận $\alpha(t+1)$, $\beta(t+1)$ hoặc $A(t+1)$, $B(t+1)$ ta tìm được giá trị sản lượng (sản lượng) của các ngành và cả các dự án kế hoạch khác. Cụ thể như sau:

+ Đối với dạng hiện vật

$$Q(t+1) = (E - \alpha(t+1))^{-1} q(t+1);$$

$$q_{ij}(t+1) = \alpha_{ij}(t+1) Q_j(t+1);$$

$$q_{0j}(t+1) = \beta_{0j}(t+1) Q_j(t+1).$$

+ Đối với dạng giá trị

$$X(t+1) = (E - A(t+1))^{-1}x(t+1).$$

$$x_{ij}(t+1) = a_{ij}(t = 1)X_j(t+1).$$

$$y_{hj}(t+1) = b_{hj}(t+1)X_j\ (t+1).$$

+ Cho trước yêu cầu về nhu cầu cuối cùng năm t+1, Tức là cho: $V^T(t + 1) = (V_1(t + 1), V_2(t + 1), V_3(t + 1))$

Ta tính được giá trị sản xuất và các chỉ tiêu khác của các ngành dựa vào công thức sau:

$$X(t+1) = (E - A(t+1))^{-1}x(t+1) = (E - A(t+1))^{-1}D(t+1)\ V(t+1).$$

Thí dụ 2.4: Với các số liệu được cho trong ví dụ 1 và giả thiết rằng $\alpha(t + 1) = \alpha(t)$, $\beta(t + 1) = \beta(t)$. Hãy lập kế hoạch sản xuất năm t+1. Biết rằng $q(t + 1) = (60, 20, 20)$.

Từ thí dụ 2.1, ta có:

$$(E - \alpha) = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 & -0,2 \\ -0,1 & 0,8 & -0,4 \\ -0,1 & -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Ta cần tìm ma trận nghịch đảo của $(E - \alpha)$. Áp dụng một trong các phương pháp quen thuộc ta có:

$$(E - \alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,386 & 0,495 & 0,594059 \\ 0,297 & 1,535 & 0,841584 \\ 0,248 & 0,446 & 1,534653 \end{pmatrix}$$

Sản lượng củ các ngành được xác định như sau:

$$Q(t+1) = (E - \alpha)^{-1} (t+1)\, q(t+1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1{,}386139 & 0{,}49505 & 0{,}594059 \\ 0{,}29703 & 1{,}534653 & 0{,}841584 \\ 0{,}247525 & 0{,}445545 & 1{,}534653 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 104{,}9505 \\ 65{,}3465 \\ 54{,}4554 \end{pmatrix}$$

Ta có bảng I/O kế hoạch kỳ t+1:

Sản lượng	Sản phẩm trao đổi trung gian			Sản phẩm c.c
104,951	20,992	13,069	10,891	60
65,347	10,495	13,069,	21,782	20
54,456	10,495	13,069	10,891	20
Lao động	10,495	13,069	5,446	t+1

Lượng sản phẩm trao đổi giữa các ngành và lượng lao động được sử dụng:

$q_{11} = \alpha_{11} * Q_1 = 0{,}2 * 104{,}950;$

$q_{12} = \alpha_{12} * Q_2 = 0{,}2 * 65{,}347 = 13{,}069;...$

$q_{01} = \beta_{01} * Q_1 = 0{,}1 * 10{,}4951 = 10{,}495;$

$q_{03} = \beta_{03} * Q_3 = 0{,}1 * 54{,}455 = 5{,}446$

Thí dụ 2.5: Với thí dụ 2.3, giả thiết rằng A(t + 1) = A(t) B(t + 1) = B(t), D(t + 1) = D(t + 1) và cơ cấu nhu cầu cuối cùng không thay đổi, hãy lập các dự án kế hoạch cho năm t + 1 biết: $x^T(t + 1) = (180, 150, 50)$.

Từ thí dụ 2.3, ta có:

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0,85 & -0,2 \\ -0,15 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Dễ dàng tính được:

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,15942 & 0,158103 & 0,184458 \\ 0,193237 & 1,238472 & 0,333773 \\ 0,241546 & 0,184453 & 1,326307 \end{pmatrix}$$

$$X(t + 1) = (E - A)^{-1} x(t + 1) = \begin{pmatrix} 241,6337 \\ 237,242 \\ 137,4612 \end{pmatrix}$$

Từ đó tính được:

$X_{11} = a_{11} * X_1 = 0,1 * 241,634 = 24,163;$

$X_{21} = a_{21} * X_1 = 0,1 * 241,634 = 24,163;$

$X_{12} = a_{12} * X_2 = 0,1 * 237,242 = 23,7242;$ ...

$Y_{11} = b_{11} * X_1 = 0,05 * 241,634 = 12,082;$

$Y_{12} = b_{12} * X_2 = 0,1 * 237,242 = 23,724;$ ...

Ta có bảng sau đây:

GTSX	Nhu cầu trung gian			NCCC
241,634	24,1634	23,724	13,746	**180**
237,242	24,1634	35,586	27,492	**150**
137,242	36,245	23,724,	27,492	**50**
Σ	**84,5718**	**83,034**	**84,5718**	**380**
Nhập khẩu	12,082	23,724	0	
Tiền lương	24,1634	17,793	27,492	
Khấu hao	12,082	17,793	13,746	
Thuế	12,082	11,862		t+1
Lợi nhuận	96,653	83,035		
Σ	**157,062**	**154,207**	**41,238**	
Tổng	**241,634**	**237,242**	**137,462**	

Do cơ cấu tiêu dùng năm t + 1 không đổi so với t, nên tỷ lệ nhu cầu cuối cùng giành cho tiêu dùng cuối cùng là:

$$150/310 = 15/31;$$

giành cho đầu tư: 100/310 = 10/31 và xuất khẩu là 6/31.

Từ đó $V_1(t+1) = 380 * 15/31 = 183,87$,

$V_1 = 380 * 10/31 = 122,58$ và $V_3 = 73,55$

$V^T = (183,87; 122,58; 73,55)$

$F_{11} = 183,87 * 0,5 = 91,935$; $f_{12} = 122,58 * 0,5 = 61,29$;

$f_{23} = 73,55 * 0,5 = 36,775$.

Tình huống trên đây thường gặp trong kinh tế, bởi lẽ mục tiêu cuối cùng của sản xuất là tạo ra các sản phẩm để tiêu dùng, mở rộng sản xuất. Do vậy, cho trước yêu cầu về nhu cầu

cuối cùng nghĩa là đặt ra mục tiêu phải đạt đến, các ngành cần phải sản xuất để đáp ứng mục tiêu này.

b. Xác định giá trị sản xuất và nhu cầu cuối cùng của một số ngành

Một tình huống khác hay đặt ra là: Chính phủ đặt trước mức sản xuất và nhu cầu cuối cùng của một số ngành, yêu cầu xác định mức sản xuất và nhu cầu cuối cùng của các ngành còn lại, từ đó lập các dự án kế hoạch khác. Trong trường hợp này nếu như tổng số biến ngoại sinh cho trước bằng n thì ta có thể xác định được n biến còn lại, dựa trên hệ (1') hoặc (3'). Tuy nhiên, lời giải có thể không chấp nhận được về mặt kinh tế. Trong trường hợp này các yêu cầu ban đầu đặt ra là không hợp lý cần phải sửa lại.

c. Xác định nhu cầu (sản phẩm) cuối cùng

Cho trước giá trị sản xuất (sản lượng sản phẩm - hiện vật) của mỗi ngành đòi hỏi xác định nhu cầu cuối cùng (sản phẩm cuối cùng) của các ngành và các dự án kế hoạch khác. Tình huống này ít được đặt ra bởi lẽ tổng sản phẩm không phải là mục tiêu cuối cùng của nền kinh tế. Chỉ tiêu tổng sản phẩm tự nó chứa các sản phẩm trung gian.

2. Xác định giá sản phẩm và chỉ số giá

a. Xác định giá sản phẩm

Giả sử chúng ta có bảng I/O dạng hiện vật, với ma trận hệ số cơ cấu kỹ thuật $\alpha = (\alpha_{ij})_{n*n}$. Gọi là P_j là giá một đơn vị sản phẩm ngành j, i = 1,2,..., n. Trong giá trị mỗi đơn vị sản phẩm của ngành j gồm hai phần:

Chi phí nguyên, nhiên, vật liệu để sản xuất, phần này bằng:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \alpha_{ij}$$

Giá trị gia tăng tính trên một đơn vị sản phẩm (phần giá trị gia tăng, các ngành dùng để chi trả cho việc sử dụng các yếu tố đầu vào sơ cấp) là: w_j. Khi đó:

$$P_j = \sum_{i=1}^{n} P_i \alpha_{ij} + w_j \ , \quad j = 1,2,...,n. \qquad (8)$$

Ký hiệu: $P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \Lambda \\ P_n \end{bmatrix}$; $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \Lambda \\ w_n \end{bmatrix}$

Khi đó (5) có thể viết dưới dạng: $(E - \alpha^T) P = W$

Hay $P^T(E - \alpha) = W^T$. (8')

Trong đó α^T là ma trận chuyển vị của ma trận α.

Thông thường vectơ W là vectơ biến ngoại sinh. Vì vậy, dựa vào (8') ta xác định được vectơ giá sản phẩm của các ngành:

$$P^T = W^T(E - \alpha)^{-1},$$

Từ đây suy ra rằng: Nếu ở năm t+1 ta biết sự thay đổi của vectơ W chẳng hạn như sự thay đổi của mức tiền công tính trên một đơn vị sản phẩm trong các ngành:

$\Delta W = W(t + 1) - W(t)$, khi đó mức thay đổi của giá sản phẩm các ngành được xác định bởi:

$$\Delta P^T = W^T(t + 1)(E - \alpha)^{-1} - W^T(t)(E - \alpha)^{-1}$$
$$= (W^T(t + 1) - W^T(t))(E - \alpha)^{-1}$$
$$= \Delta W^T(E - \alpha)^{-1}.$$

Từ đây có thể tính được giá và chỉ số giá trong nền kinh tế quốc dân.

Thí dụ 2.6: Ở thí dụ 2.1, cho $W^T = (0,2; 0,15; 0,10)$, khi đó giá sản phẩm của các ngành là:

$$P^T = W^T (E - \alpha)^{-1} = (0,2; 0,15; 0,1) \begin{pmatrix} 1,386 & 0,495 & 0,594 \\ 0,297 & 1,535 & 0,842 \\ 0,248 & 0,446 & 1,535 \end{pmatrix}$$

$P^T = (0,347; 0,374; 0,399)$.

Nếu cho $\Delta W = (-0,05; 0,05; 0,5)$ thì:

$$\Delta P^T = \Delta W^T (E - \alpha)^{-1} = (-0,05; 0,05; 0,1) \begin{pmatrix} 1,386 & 0,495 & 0,594 \\ 0,297 & 1,535 & 0,842 \\ 0,248 & 0,446 & 1,535 \end{pmatrix}$$

$\Delta P^T = (-0,0297; 0,096535; 0,165842)$.

b. Xác định chỉ số giá trên cơ sở bảng I/O dạng giá trị

Ở mục 3 đã nói một số nhược điểm của bảng I/O dạng hiện vật. Trên thực tế người ta có thể dựa trên bảng I/O dạng giá trị để xác định chỉ số giá.

Nếu như giá mỗi đơn vị sản phẩm ngành thứ j ở năm t là $P_j(t)$ và ở năm t + 1 là $P_j(t + 1)$, khi đó chỉ số giá của sản phẩm này ký hiệu là $k_j(t + 1)$, ta có: $k_j(t + 1) = \dfrac{P_j(t+1)}{P_j(t)}$. Để đơn giản ta viết là k_j. Tương tự như vậy, ta có chỉ số giá đối với các yếu tố đầu vào sơ cấp, ký hiệu là w_i, i = 1,2,..., 5.

Giả sử rằng chúng ta có bảng I/O dạng giá trị ở năm t,

khi đó biết được ma trận A và ma trận B. Từ hai mà trận trên bao giờ cũng có:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} + \sum_{h=1}^{5} b_{hj} = 1 \text{ với } j = 1, 2,..., n. \quad (9)$$

Về mặt kinh tế, nhìn trên từng cột của hai ma trận A và B ta biết được cơ cấu hay tỷ trọng các yếu tố cấu thành một đơn vị giá trị sản phẩm của từng ngành. Một tình huống đặt ra là: Trong thời kỳ kế hoạch t+1, Chính phủ có thể thay đổi giá của các (hoặc một số) yếu tố đầu vào, chẳng hạn giá nhập khẩu (hoặc tiền lương thay đổi...) khi đó sẽ ảnh hưởng đến hệ thống giá trong nền kinh tế quốc dân như thế nào?

Để đơn giản ta giả thiết rằng A(t+1) = A(t); B(t+1) = B(t).

Gọi: $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \Lambda \\ k_n \end{bmatrix}$ là vectơ chỉ số giá của các ngành;

$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \Lambda \\ w_m \end{bmatrix}$ là vectơ chỉ số giá đầu vào các yếu tố sơ cấp.

Vectơ w là vectơ ngoại sinh (chỉ số tỷ giá hối đoái, chỉ số thuế suất, chỉ số tiền công, chỉ số khấu hao....)

Từ (9) ta có: $\sum_{i=1}^{n} k_i a_{ij} + \sum_{h=1}^{5} w_h b_{hj} = k_j$ với j = 1, 2,..., n. (10)

Viết dưới dạng ma trân ta có:

$$K = A^T K + B^T w$$

hay: $$(E - A^T)K = B^T w$$

hay $K^T(E - A) = w^TB.$

suy ra: $K^T=w^TB(E-A)^{-1}$ (11)

Nếu tính mức thay đổi ta sử dụng công thức sau:

$$\Delta K^T = \Delta w^TB\,(E - A)^{-1}. \quad (12)$$

Công thức (11) cho phép xác định vectơ chỉ số giá nếu Chính phủ cho vectơ chỉ số giá các yếu tố đầu vào. Trong trường hợp Chính phủ cho mức thay đổi (Δw) chỉ số giá các yếu tố đầu vào thì sự thay đổi của vectơ chỉ số giá được xác định bằng công thức (12).

Thí dụ 2.7: Ở thí dụ 2.3, nếu như trong thời kỳ kế hoạch các định mức kinh tế - kỹ thuật không thay đổi, nhưng Nhà nước tăng tỷ giá hối đoái 2%, tăng tiền công 5%, tăng thuế 20%, giá các yếu tố đầu vào sơ cấp khác không thay đổi. Yêu cầu xác định vectơ chỉ số giá của các sản phẩm khác.

Với các giả thiết trên vectơ chỉ số giá các yếu tố đầu vào sơ cấp là: w = (1,02; 1,05; 1,0; 1,2,; 1,0),

Theo công thức (7), trước hết tính $B(E - A)^{-1}$, ta có:

$$B(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,100 & 0,07 \\ 0,10 & 0,075 & 0,2 \\ 0,05 & 0,075 & 0,1 \\ 0,05 & 0,05 & 0,1 \\ 0,4 & 0,35 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,159 & 0,158 & 0,185 \\ 0,193 & 1,238 & 0,334 \\ 0,242 & 0,185 & 1,326 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,077 & 0,132 & 0,043 \\ 0,179 & 0,146 & 0,309 \\ 0,097 & 0,119 & 0,167 \\ 0,092 & 0,088 & 0,159 \\ 0,556 & 0,515 & 0,323 \end{bmatrix}$$

Do đó: $K^T = w^T B(E-A)^{-1}$

$$K^T = (1,02;\ 1,05;\ 1,0;\ 1,2;\ 1,1) \begin{bmatrix} 0,077 & 0,132 & 0,043 \\ 0,179 & 0,146 & 0,309 \\ 0,097 & 0,119 & 0,167 \\ 0,092 & 0,088 & 0,159 \\ 0,556 & 0,515 & 0,323 \end{bmatrix}$$

$K^T = (1,02989;\ 1,0254;\ 1,04911)$

Thí dụ 2.8: Ở thí dụ 2.3, hãy xác định mức thay đổi của chỉ số giá nếu trong thời kỳ kế hoạch tiền công tăng 10%, các yếu tố khác không thay đổi. Trong trường hợp này cho w:

$$w^T = (0;\ 0,1;\ 0;\ 0;\ 0).$$

Ta cần phải tính: $\Delta K^T = \Delta w^T B\ (E - A)^{-1}$.

Từ các số liệu đã có, ta có:

$$\Delta K^T = (0;\ 0,1;\ 0;\ 0;\ 0) \begin{bmatrix} 0,077 & 0,132 & 0,043 \\ 0,179 & 0,146 & 0,309 \\ 0,097 & 0,119 & 0,167 \\ 0,092 & 0,088 & 0,159 \\ 0,556 & 0,515 & 0,323 \end{bmatrix}$$

$= (0,0179;\ 0,0146;\ 0,0309)$

Trên đây đã trình bày những nội dung chủ yếu của bảng I/O. Đó là những kiến thức ít ỏi nhưng cơ bản mà người học cần hiểu được để có thể vận dụng trong thực tế, cũng như để học ở các trình độ cao hơn. Dựa trên bảng I/O có thể phân tích và dự báo một số chỉ tiêu kinh tế vĩ mô và lập các dự án kế hoạch Với việc xây dựng và hoàn thiện hệ thống SNA ở nước ta. Hy vọng trong thời gian tới, bảng I/O sẽ được vận dụng tốt trong thực tế.

Bài tập chương II

1. Cho bảng cân đối liên ngành dạng hiện vật năm t

Sản lượng	Sản phẩm trung gian			SPCC
300	60	24	80	136
240	30	48	40	122
400	90	24	120	166
Lao động	30	36	40	Năm t + 1

a. Hãy xác định các hệ số kỹ thuật và hệ số sử dụng lao động.

b Biết q(t+1) = (150, 140, 180) và các hệ số kỹ thuật, lao động không đổi so với năm t. Lập bảng cân đối liên ngành năm (t + 1).

c. Hãy xác định vectơ giá sản phẩm được sản xuất ra. Biết giá trị gia tăng của các ngành là: $w^T = (0,05; 0,1; 0,15)$.

TL: b: (330, 789; 271,053; 473,053); c: (0,197; 0,187; 0,267)

2. Cho bảng cân đối liên ngành hiện vật của 3 ngành năm t:

Sản lượng	Sản phẩm trung gian			SPCC
210	42	36	66	
	0	36	22	122
220		18	22	96
Lao động	42	18	66	Năm t + 1

a. Hãy tìm các giá trị còn thiếu trong bảng.

b. Xác định ma trận hệ số kỹ thuật và vectơ sử dụng lao động năm t.

c. Nếu biết $\alpha_{31}(t + 1) = \frac{1}{2}\alpha_{31}(t)$ còn các hệ số khác không đổi và q(t + 1) = (70, 130, 100). Hãy lập bảng cân đối liên ngành năm (t + 1).

TL: c: X(t+1) = (199,612; 184,495; 175,969)

3. Cho ma trận hệ số kỹ thuật của năm t của 3 ngành dạng hiện vật:

$$\alpha(t) = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}$$

và vectơ sử dụng lao động năm t: β(t) = (0,1; 0,2; 0,15)

a. Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ của năm t. Giải thích ý nghĩa kinh tế của phần tử ở cùng cột 3 của ma trận này.

b. Biết q(t+1) = (60, 50, 70) và các hệ số không đổi so với năm t. Lập bảng cân đối liên ngành năm (t+1).

c. Hãy xác định vectơ giá sản phẩm các ngành, biết phần giá trị gia tăng kế hoạch là: w^T = (0,1; 0,05; 0,15).

TL: b: X(t+1) = (1450; 1990; 1500); c: (0,2; 0,175; 0,225)

4. Cho các hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị năm t của 3 ngành như sau:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{bmatrix}$$

và hệ số chi phí lao động $A_0(t) = (0,2; 0,1; 0,2)$

Giá trị sản lượng của các ngành ở năm t tương ứng lần lượt là: 450; 600; 560.

a. Hãy lập bảng cân đối liên ngành của năm t.

b. Hãy tính hệ số chi phí toàn bộ của năm t, giải thích ý nghĩa kinh tế của phần tử ở dòng thứ 2 cột thứ 3 của ma trận này.

c. Nếu đến năm (t+1) nhu cầu về sản phẩm cuối cùng của các ngành là (180; 150; 100), hãy tính giá trị sản lượng của các ngành năm (t+1), Biết rằng các hệ số chi phí của 2 năm là như nhau.

5. Cho bảng cân đối liên ngành dạng giá trị của 3 ngành ở năm t:

X_i	x_{ij}			x_i
400		38	90	112
	40	19	15	116
300	80	38	30	
V	80		30	Năm t
M		57		

a. Tìm các số liệu còn thiếu ở bảng trên.

b. Tính các hệ số chi phí trực tiếp, ma trận hệ số chi phí toàn bộ của năm t. Giải thích ý nghĩa kinh tế của phần tử a_{31} và hệ số chi phí toàn bộ ở dòng 3 cột 1.

c. Biết x(t+1) = (500, 200, 300) và các hệ số chi phí của năm (t+1) không thay đổi so với năm t. Hãy lập dự án cho năm (t+1).

6. Cho các hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị ở năm t của 3 ngành như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Hệ số chi phí lương: (0,2; 0,2; 0,1), giá trị sản lượng của các ngành ở năm t là (1450; 1990; 1500) tỷ VND.

a. Hãy lập bảng cân đối liên ngành năm t.

b. Tính các hệ số chi phí toàn bộ của năm t. Hãy chọn một hệ số chi phí toàn bộ và giải thích ý nghĩa kinh tế của nó.

c. Biết x(t+1) = (800, 1500, 700) và các hệ số không đổi. Lập bảng cân đối liên ngành năm (t+1).

7. Cho bảng cân đối liên ngành dạng giá trị năm t của 3 ngành:

Đơn vị tính: Tỷ VND

X_i	x_{ij}			x_i
2500	250		400	1490
1800	500	180	400	
220	750	360	200	690
V		180	400	Năm t
M	500			

a. Tìm các số liệu còn thiếu trên bảng.

b. Tính các hệ số chi phí trực tiếp của năm t. Giải thích ý nghĩa của phần tử a_{32}.

c. Nếu đến năm (t+1) nhu cầu về sản phẩm cuối cùng của ngành tương ứng lần lượt là: (540; 250; 300) tỷ VND. Lập bảng cân đối liên ngành cho năm (t+1) biết A(t+1) = A(t); $A_0(t+1) = A_0(t)$.

8. Cho bảng cân đối liên ngành dạng giá trị năm t:

Đơn vị tính: tỷ VND

Giá trị TSL	Giá trị SP trao đổi trung gian			Giá trị SPCC
200	20	30	20	130
200	20	20	10	150
100	30	20	20	30
Nhập khẩu	10	10	10	Năm t
Lương	20	15	20	
Khấu hao	10	15	0	
Thuế	10	20	10	

a. Hãy tính ma trận hệ số kỹ thuật và giải thích ý nghĩa của phần tử a_{12}.

b. Hãy tính ma trận hệ số các yếu tố đầu vào sơ cấp. Giải thích ý nghĩa của b_{23}.

c. Cho x(t+1) = (150; 120; 70), các hệ số không đổi. Lập kế hoạch năm (t+1).

9. Cho bảng cân đối liên ngành năm t dạng giá trị (đơn vị: Tỷ VND) của 3 ngành:

Giá trị TSL	Giá trị SP trao đổi trung gian			Giá trị SPCC
600	120	90	56	
450	60	45	112	
560	90	22,5	168	
Nhập khẩu	30	45	84	Năm t
Lương	60	67,5	28	
Khấu hao	60	45	28	
Thuế	60	45	28	
Lợi nhuận	120	90	56	

a. tìm vectơ SPCC năm t.

b. Lập kế hoạch năm (t+1) biết: x(t+1) = (500; 100; 400) và các hệ số không thay đổi.

10. Cho ma trận hệ số năm t:

$$\begin{bmatrix} 0,10 & 0,10 & 0,10 \\ 0,10 & 0,15 & 0,20 \\ 0,15 & 0,10 & 0,20 \\ 0,05 & 0,10 & 0 \\ 0,10 & 0,075 & 0,20 \\ 0,05 & 0,075 & 0,10 \\ 0,05 & 0,05 & 0,10 \\ 0,4 & 0,35 & 0,10 \end{bmatrix}$$

Hãy lập bảng cân đối liên ngành năm (t+1) với x(t+1) = (500; 700; 400) và $a_{11}(t+1) = 0,2$; $a_{13}(t+1) = 0,05$; $a_{22}(t+1) = 0,1$; $a_{31}(t+1) = 0,3$.

11. Cho ma trận hệ số chi phí năm t:

$$\begin{bmatrix} 0,10 & 0,20 & 0,10 \\ 0,10 & 0,10 & 0,20 \\ 0,10 & 0,10 & 0 \\ 0,05 & 0,05 & 0,01 \\ 0,20 & 0,15 & 0,10 \\ 0,05 & 0,06 & 0,08 \\ 0,10 & 0,10 & 0,10 \\ 0,30 & 0,24 & 0,41 \end{bmatrix}$$

a. Lập kế hoạch năm (t+1) với: $a_{11}(t+1) = 0,15$; $a_{33}(t+1) = 0,10$; hệ số nhập khẩu: (0,10; 0,10; 0,05; hệ số khấu hao: (0,05; 0,06; 0,10); x(t+1) = (750; 1100; 1350).

b. Tính chỉ số giá nếu:

$$w^T = (0,1; 0,05; 0,08; 0,05; 0,15).$$

12. Cho bảng cân đối liên ngành năm t:

Giá trị TSL	Giá trị SP trao đổi trung gian			Giá trị SPCC
420	84	0	120	216
650	42	130	80	398
800	63	65	160	512
Nhập khẩu	42	65	40	Năm t
Lương	21	65	40	
Khấu hao	42	130	80	
Thuế	42	65	80	
Lợi nhuận	84	130	200	

a. Giả thiết rằng trong thời kỳ kế hoạch các định mức kinh tế kỹ thuật không thay đổi. Lập bảng cân đối liên ngành năm (t+1) với x(t+1) = (300; 500; 700).

b. Cho chỉ số giá các yếu tố đầu vào năm kế hoạch là:

$$w^T = (0,1; 0,05; 0,2; 0,1; 0,2)$$

Hãy xác định vectơ chỉ số giá của các sản phẩm được sản xuất.

13. a. Điền giá trị thích hợp vào chỗ trống trong bảng cân đối liên ngành dưới đây:

Giá trị TSL	Giá trị SP trao đổi trung gian			Giá trị SPCC
1450	x_{11}	x_{12}	x_{13}	710
1990	x_{21}	x_{22}	x_{23}	1496
1500	x_{31}	x_{32}	x_{33}	662
Nhập khẩu	72,5	398	150	Năm t
Lương	145		150	
Khấu hao	145	99,5	75	
Thuế	72,5	199	150	
Lợi nhuận	290	398	225	

b. Cho $x_{ij}(t) = \begin{bmatrix} 290 & 0 & 450 \\ 145 & 199 & 150 \\ 290 & 398 & 150 \end{bmatrix}$

với x(t+1) = (1000; 1500; 800) và các hệ số của năm (t+1) không đổi so với năm t. Lập bảng cân đối liên ngành năm (t+1).

c. Cho $w^T = (0,05; 0; 0,1; 0,15; 0,2)$. Tính K^T.

14. Biết ma trận hệ số chi phí dạng giá trị ở năm (t+1) của 3 ngành như sau:

$$\begin{bmatrix} 0,10 & 0,10 & 0,05 \\ 0,15 & 0,15 & 0,10 \\ 0,10 & 0,20 & 0,10 \\ 0,15 & 0,10 & 0,20 \\ 0,10 & 0,05 & 0,15 \\ 0,10 & 0,05 & 0,15 \\ 0,08 & 0,10 & 0,15 \\ 0,22 & 0,25 & 0,10 \end{bmatrix}$$

a. Với x(t+1) = (1000; 1500; 1200) lập bảng cân đối liên ngành năm (t+1).

b. Cho w^T = (0,05; 0,1; 0,15; 0,1; 0,2). Hãy xác định vectơ chỉ số giá của các sản phẩm được sản xuất?

15. Cho ma trận hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị năm t như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{bmatrix}$$ và các hệ số lương: (0,2; 0,1; 0,2).

Biết giá trị sản phẩm năm t của các ngành là (450; 600; 560) (tỷ VND).

a. Lập bảng cân đối liên ngành năm t.

b. Tìm ma trận hệ số chi phí toàn bộ dạng giá trị năm t. Giải thích ý nghĩa kinh tế của phần tử ở dòng 2 cột 3 của ma trận này.

c. Năm (t+1) nhu cầu sản phẩm cuối cùng của các ngành là (180, 150 100) (tỷ VND). Tính giá trị sản lượng của các ngành, biết rằng các hệ số chi phí năm (t+1) và năm t như nhau.

16. Cho ma trận hệ số chi phí trực tiếp về sản phẩm trung gian dạng giá trị năm t như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$$

a. Biết giá trị sản lượng của các ngành năm t tương ứng lần lượt là: (420, 650, 800).

Hãy tính giá trị sản phẩm trao đổi giữa các ngành trong năm đó.

b. Với chỉ tiêu ở câu a, tính giá trị sản phẩm cuối cùng của các ngành.

c. Năm (t+1) hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị của ngành 2 trong tất cả các ngành tăng 50% so với năm t, còn các hệ số khác không đổi. Chỉ tiêu giá trị sản lượng các ngành là (500, 800, 1000) tỷ VND thì giá trị sản phẩm cuối cùng của ngành 2 sẽ biến động như thế nào?

17. Cho ma trận hệ số chi phí toàn bộ dạng giá trị năm t:

$$C = \begin{bmatrix} 1,68 & 0,66 & 0,82 \\ 0,72 & 1,33 & 0,47 \\ 0,51 & 0,66 & 1,41 \end{bmatrix}$$

a. Giải thích ý nghĩa kinh tế của các phần tử trên dòng 2 của C.

b. Với giá trị sản phẩm cuối cùng năm t là (400, 600, 200) tỷ VND, tính giá trị sản lượng của các ngành và giá trị sản phẩm trao đổi trung gian của các ngành trong năm t.

c. Tính quỹ lương của các ngành nếu chúng bằng 5% giá trị sản lượng mỗi ngành.

18. Cho các ma trận hệ số chi phí trực tiếp và chi phí toàn bộ dạng giá trị năm t:

$$A=\begin{bmatrix}0,2 & 0,1 & 0,2\\ 0,4 & 0,1 & 0,3\\ 0 & 0,2 & 0,3\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}1,378 & 0,257 & 0,467\\ 0,654 & 1,308 & 0,56\\ 0,186 & 0,373 & 1,588\end{bmatrix}$$

a. Hãy nêu ý nghĩa của a_{12} và c_{12}. Vì sao chúng khác nhau?

b. Với x(t) = (90, 60, 100). Lập bảng số liệu phản ánh phân bố sản phẩm của các ngành trong năm t.

c. Tính quỹ lương các ngành, biết hệ số lương của sản phẩm các ngành là 0,05.

19. Cho ma trận hệ số chi phí toàn bộ dạng giá trị năm t:

$$C=\begin{bmatrix}1,21 & 0,19 & 0,36\\ 0,4 & 1,22 & 0,12\\ 0,49 & 0,39 & 1,25\end{bmatrix}$$

a. Nếu giá trị sản phẩm cuối cùng của các ngành năm t là (100, 100, 100) tỷ VND. Hãy tính giá trị sản lượng các ngành trong năm đó.

b. Năm (t+1) các hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị không đổi so với năm t nhưng nhu cầu sản phẩm cuối cùng của

các ngành đều tăng 20%. Khi đó chỉ tiêu giá trị sản lượng của các ngành phải thay đổi bao nhiêu % để đáp ứng nhu cầu trên?

c. Với các chỉ tiêu ở cầu b, tính tổng giá trị sản phẩm trung gian của ngành 2.

20. Cho các ma trận hệ số chi phí trực tiếp và chi phí toàn bộ dạng giá trị năm t và năm (t+1) như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1,636 & 0,848 & 0,545 \\ 0,545 & 1,393 & 0,182 \\ 0,454 & 0,606 & 1,818 \end{bmatrix}$$

a. Cho giá trị sản lượng năm t: X(t) = (1000, 800, 500) tỷ VND, tính giá trị sản phẩm cuối cùng của các ngành năm t.

b. Năm (t+1) nhu cầu giá trị sản phẩm cuối cùng của tất cả các ngành tăng 10%. Tính giá trị sản lượng các ngành trong năm đó.

c. Tính giá trị khối lượng sản phẩm của ngành 2 mà các ngành sử dụng trong năm (t+1).

21. Nền kinh tế với 3 ngành, sản phẩm có mọi định mức kỹ thuật năm (t+1) như năm t.

a. Giả sử so với năm t, năm (t+1) đồng tiền mất giá u% (giá các sản phẩm tăng u%) trong khi đó hệ số tiền lương sản phẩm các ngành tăng v%. Cần thay đổi chỉ tiêu giá trị sản lượng như thế nào để đáp ứng nhu cầu tăng lên z% khối lượng sản phẩm cuối cùng của tất cả các ngành trong năm (t+1)?

b. Nêu 1 thí dụ cụ thể và tiến hành các tính toán, kiểm tra kết quả câu a.

22. Cho ma trận hệ số chi phí trực tiếp A và ma trận hệ số chi phí toàn bộ C dạng giá trị năm t:

$$A=\begin{bmatrix}0,1 & 0,3 & 0,3\\ 0,4 & 0,3 & 0,4\\ 0,3 & 0,2 & 0,2\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}2,253 & 1,408 & 1,549\\ 2,066 & 2,957 & 2,253\\ 1,361 & 1,267 & 2,394\end{bmatrix}$$

a. Giải thích ý nghĩa kinh tế của tổng các phần tử ở cột 2 ma trận A và tổng các phần tử ở dòng 1 ma trận C.

b. Cho vectơ giá sản phẩm các ngành năm t là P(t) = (12, 16, 20). Lập bảng cân đối vật tư liên ngành năm t nếu sản phẩm cuối cùng dạng hiện vật năm t là (150, 250, 300).

c. Nếu muốn tăng 1 đơn vị sản phẩm cuối cùng của ngành thứ nhất thì sản lượng các ngành phải thay đổi như thế nào?

23. Cho ma trận hệ số chi phí trực tiếp A và ma trận hệ số chi phí toàn bộ C dạng giá trị ở năm t:

$$A=\begin{bmatrix}0,2 & 0 & 0,3\\ 0,1 & 0,1 & 0,1\\ 0,2 & 0,2 & 0,1\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}1,38 & 0,10 & 0,47\\ 0,19 & 1,15 & 0,19\\ 0,35 & 0,28 & 1,26\end{bmatrix}$$

a. Hãy cho biết ý nghĩa kinh tế của a_{21} và c_{21}. Vì sao chúng có sự khác nhau?

b. Với x(t) = (150; 150;200) tỷ VND, hãy tính giá trị tổng sản lượng và giá trị gia tăng của các ngành.

c. Có ý kiến cho rằng nếu các hệ số chi phí toàn bộ của các ngành đều giảm 10% thì với x(t) như ở câu b, giá trị tổng sản lượng của các ngành sẽ tăng 10%. Hãy nhận xét ý kiến trên.

24. Cho ma trận hệ số chi phí dạng giá trị năm t như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$$

a. Biết giá trị sản lượng của các ngành năm t là: X(t) = (200; 350; 300) tỷ VND. Hãy tính tổng giá trị sản phẩm trao đổi giữa các ngành trong năm đó.

b. Với các chỉ tiêu ở câu a, nếu chi phí trực tiếp của ngành 2 cho các ngành đều giảm 10%. Khi đó giá trị gia tăng của các ngành sẽ biến động như thế nào?

c. Đến năm (t+1), hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị về sản phẩm của ngành 2 cho tất cả các ngành đều tăng 50% so với năm t; còn các hệ số khác không thay đổi và chỉ tiêu về giá trị tổng sản lượng của các ngành là (400; 600; 800) tỷ VND thì giá trị sản phẩm cuối cùng của ngành 2 sẽ biến động như thế nào?

25. Cho bảng cân đối liên ngành dạng giá trị năm t như sau:

GTSL	Chi phí sản xuất			GTSPCC
250	25	90	90	45
450			30	190
300	100	45		35
V	50	90		Năm t
M		45	30	

a. Xác định các giá trị thiếu trong bảng.

b. Tìm ma trận hệ số chi phí trực tiếp dạng giá trị năm t. Giải thích ý nghĩa kinh tế của phần tử ở dòng 2 cột 2 của ma trận này.

c. Với điều kiện mọi định mức năm (t + 1) như năm t. Tính lượng giá trị sản phẩm ngành thứ 2 cung cấp cho mỗi ngành trong quá trình sản xuất ở năm (t + 1). Nếu nhu cầu giá trị sản phẩm cuối cùng của các ngành năm (t+1) là (200; 400; 600) tỷ VND.

Biết ma trận hệ số chi phí toàn bộ năm t+1 là:

$$C=\begin{bmatrix} 1,707 & 0,732 & 0,976 \\ 0,78 & 2,049 & 0,732 \\ 1,268 & 0,829 & 2,439 \end{bmatrix}$$

Chương III
MÔ HÌNH TỐI ƯU TUYẾN TÍNH - QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Quy hoạch tuyến tính (QHTT) là mô hình toán kinh tế được áp dụng khá rộng rãi và thành công trong nhiều lĩnh vực hoạt động SX - KD. Rất nhiều vấn đề, tình huống trong quản lý kinh doanh (QLKD) có thể mô hình hoá bằng mô hình QHTT. Việc phân tích mô hình, tìm lời giải bằng số chẳng những làm sáng tỏ bản chất của các đối tượng trong phạm vi điều hành của các nhà quản lý mà còn giúp họ đưa ra các phương thức quản lý hiệu quả.

I. MỘT SỐ TÌNH HUỐNG TRONG HOẠT ĐỘNG KINH TẾ VÀ MÔ HÌNH BÀI TOÁN QHTT TƯƠNG ỨNG

Thực tiễn hoạt động SX - KD hết sức sôi động và đa dạng, đặt biệt trong điều kiện cạnh tranh quyết liệt của cơ chế thị trường. Các nhà quản lý doanh nghiệp thường xuyên phải ra *quyết định lựa chọn giải pháp, phương án hành động*. Mặc dù bị ràng buộc, bị hạn chế bởi hàng loạt các điều kiện liên quan tới tiềm năng của doanh nghiệp, điều kiện của thị trường và hoàn cảnh tự nhiên, xã hội nhưng khả năng lựa chọn cũng khá lớn. Quyết định lựa chọn của các nhà quản lý đều gắn với mục đích nhất định và đó là *sự lựa chọn tối ưu theo mục tiêu định trước*. Nếu tất cả các yếu tố (các biến số)

liên quan tới khả năng, mục đích và quyết định lựa chọn đều có *mối quan hệ tuyến tính* thì chúng ta hoàn toàn có thể sử dụng mô hình QHTT để mô tả, phân tích và tìm lời giải cho vấn đề lựa chọn tối ưu của các nhà quản lý. Chúng ta có thể thấy rõ vài trò của QHTT qua một số thí dụ dưới đây:

Thí dụ 3.1: **Marketing:** Lựa chọn phương tiện thông tin - quảng cáo tiếp thị có hiệu quả.

Tình huống: Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khác hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trện sóng phát thanh là 80.000đ, trên sóng truyền hình là 400.000đ. Đài phát thành chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình rất lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích xã hội học, cùng thời lượng 1 phút quảng cáo, trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa là 1.600.000đ cho quảng cáo. Công ty nên đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

Mô hình hoá: Gọi thời lượng công ty dự định đặt quảng cáo trên sóng phát thanh là x_1(phút), trên truyền hình là x_2 phút. Chi phí cho việc này là $80.000x_1 + 400.000x_2$(đ). Mức chi này không được phép vượt quá mức chi tối đa, tức là $80.000x_1 + 400.000x_2 \leq 1.600.000$.

Do các điều kiện đài phát thanh, truyền hình đưa ra, ta phải có $x_1 \geq 5$, $x_2 \leq 4$. Đồng thời do x_1, x_2 là thời lượng nên $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Hiệu quả chung của quảng cáo là $x_1 + 6x_2$.

Như vậy chúng ta có bài toán:

Xác định x_1, x_2 sao cho: $x_1 + 6x_2 \Rightarrow Max$

Với các điều kiện: $80.000x_1 + 400.000x_2 \leq 1.600.000$

$$x_1 \geq 5,\ x_2 \leq 4$$

và $$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Bài toán có cấu trúc như trên gọi là bài toán QHTT.

Thí dụ 3.2: **Đầu tư tài chính:** Lựa chọn danh mục đầu tư.

Tình huống: Một công ty đầu tư dự định dùng khoản quỹ đầu tư 500.000 triệu đồng để mua một số cổ phiếu trên thị trường chứng khoán. Công ty đưa ra các giới hạn trên của số tiền mua từng loại chứng khoán nhằm đa dạng hoá danh mục đầu tư để phòng ngừa rủi ro. Bảng dưới đây cho các số liệu về các giới hạn này cũng như lãi suất của các chứng khoán:

Loại chứng khoán	Lãi suất (trung bình)	Giới hạn mua
A	7% /năm	100.000 triệu
B	8,5%/ năm	300.000 triệu
C	7,8%/ năm	250.000 triệu
D	8,2%/ năm	320.000 triệu

Ngoài ra, cũng để ngăn ngừa rủi ro trong đầu tư, công ty còn quy định khoản đầu tư vào loại cổ phiếu A và C phải chiếm ít nhất là 55%, loại cổ phiếu B phải chiếm ít nhất 15% trong tổng số tiền đầu tư thực hiện. Hãy xác định số tiền công ty sẽ mua từng loại cổ phiếu (một danh mục đầu tư) sao cho

không vượt quá khoản dự kiến ban đầu, đảm bảo đòi hỏi về đa dạng hoá đồng thời đạt mức lãi (trung bình) cao nhất.

Mô hình hoá: Gọi x_A, x_B, x_C, x_D là các khoản tiền từ quỹ đầu tư dùng để mua các loại chứng khoán A, B, C, D. Rõ ràng là x_A, x_B, x_C, $x_D \geq 0$. Từ các điều kiện về đa dạng hoá và về quỹ đầu tư ta thấy:

$$x_A \leq 100.000,\ x_B \leq 300.000,\ x_C \leq 250.000,\ x_D \leq 320.000$$

$$x_A + x_C \geq 0{,}55(x_A + x_B + x_C + x_D)$$

$$x_B \geq 0{,}15(x_A + x_B + x_C + x_D)$$

$$x_A + x_B + x_C + x_D \leq 500.000$$

Mức lãi ứng với danh mục (x_A, x_B, x_C, x_D) là:

$$0{,}07x_A + 0{,}085x_B + 0{,}078x_C + 0{,}082x_D$$

Ta có bài toán: Xác định danh mục đầu tư $x = (x_A, x_B, x_C, x_D)$ sao cho:

$$0{,}07x_A + 0{,}085x_B + 0{,}078x_C + 0{,}082x_D \Rightarrow \text{Max}$$

với các điều kiện:

$$x_A + x_C \geq 0{,}55(x_A + x_B + x_C + x_D)$$

$$x_B \geq 0{,}15(x_A + x_B + x_C + x_D)$$

$$x_A + x_B + x_C + x_D \leq 500.000$$

$$0 \leq x_A \leq 100.000,$$

$$0 \leq x_B \leq 300.000,$$

$$0 \leq x_C \leq 250.000,$$

$$0 \leq x_D \leq 320.000$$

Thí dụ 3.3: **Bài toán vận tải**

Tình huống: Công ty kinh doanh xăng dầu khu vực Z hàng tuần cần cung ứng xăng cho 3 trạm bán lẻ A, B, và C. Công ty có thể đưa xăng từ tổng kho I và II. Dự trù cung ứng xăng cho các trạm của kho I là 20 tấn, kho II là 40 tấn. Chi phí cho việc cung ứng xăng từ kho đến các trạm (bao gồm cước vận chuyển, phí giao nhận, bảo quản...) được cho trong bảng dưới đây:

Đơn vị: Nghìn đồng/tấn

Trạm / kho	A	B	C
I	500	400	700
II	600	500	500

Nhu cầu tiêu thụ xăng hàng tuần của 3 trạm lần lượt là 20, 15, 15 (tấn). Công ty cần lập kế hoạch cung ứng xăng từ dự trù của các kho đến các trạm để đảm bảo đủ nhu cầu của các trạm với tổng chi phí là nhỏ nhất.

Mô hình hoá: Gọi lượng xăng chuyển từ kho I, kho II đến các trạm lần lượt là x_{1A}, x_{1B}, x_{1C} và x_{2A}, x_{2B}, x_{2C} (tấn). Để đảm bảo đủ theo nhu cầu của các trạm, ta phải có:

$$x_{1A} + x_{2A} = 20,$$
$$x_{1B} + x_{2B} = 15,$$
$$x_{1C} + x_{1C} = 15.$$

Do tổng xăng dầu chuyển từ mỗi kho đến các trạm không thể vượt quá dự trù cung ứng của các kho nên:

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 20.$$

$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 40.$$

Tổng chi phí tương ứng là:

$500x_{1A} + 400x_{1B} + 700x_{1C} + 600x_{2A} + 500x_{2B} + 500x_{2C}$ (nghìn đồng)

Ta có bài toán sau:

Xác định $x_{1A}, x_{1B}, x_{1C}, x_{2A}, x_{2B}, x_{2C}$ sao cho:

$500x_{1A}+400x_{1B}+700x_{1C}+600x_{2A}+500x_{2B}+500x_{2C} \Rightarrow$ **Min**

Với điều kiện :

$$x_{1A} + x_{2A} = 20$$

$$x_{1B} + x_{2B} = 15$$

$$x_{1C} + x_{2C} = 15$$

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 20$$

$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 40$$

$x_{1A} \geq 0, x_{1B} \geq 0, x_{1C} \geq 0, x_{2A} \geq 0, x_{2B} \geq 0, x_{2C} \geq 0$ (do các biến số biểu thị lượng xăng được vận chuyển).

Bài toán này cũng được gọi là bài toán QHTT, tuy nhiên do có nội dung kinh tế cụ thể nên nó thuộc lớp bài toán có tên gọi riêng là bài toán vận tải.

II. MÔ HÌNH BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát

Mô hình của các bài toán được thiết lập từ các thí dụ trên tuy có khác nhau về nội dung phản ánh nhưng xét về hình thức, về cấu trúc, chúng đều có tính chất tương tự. Chúng đều là bài toán tìm cực trị (cực tiểu hoặc cực đại) của

một hàm **tuyến tính** trên một tập hợp được mô tả bởi một hệ thống hỗn hợp các phương trình và/hoặc bất phương trình **tuyến tính.** Một cách tổng quát, mô hình bài toán QHTT có dạng như sau:

Xác định vectơ $x = (x_1, x_2,...x_j,... x_n)$ sao cho:

$$z = f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \text{Min(Max)} \qquad (1.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i \in I_1) \qquad (1.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ (i \in I_2) \qquad (1.3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i (i \in I_3) \qquad (1.4)$$

Trong đó:

I_1, I_2, và I_3 là tập các chỉ số (I_1, I_2, I_3 không giao nhau); ta sẽ kí hiệu $i = I_1 \cup I_2 \cup I_3$

a_{ij}, b_i, c_j với $i \in I$, $j = 1 \div n$ là các hằng số (có thể là tham số)

x_j với $j = 1 \div n$ là các biến số (ẩn số) của bài toán.

Rõ ràng bài toán QHTT là một mô hình toán kinh tế với các biến nội sinh là z, x_j ($j = 1 \div n$); các biến ngoại sinh là a_{ij}, b_i, c_j với $i \in I$, $j = 1 \div n$.

Mặc dù bài toán QHTT là bài toán cực trị có điều kiện nhưng ta sẽ không sử dụng phương pháp lagrange trong giải tích để giải vì:

- Bài toán QHTT có thể chứa các ràng buộc dạng bất phương trình.

- Do cấu trúc đặc biệt của hệ ràng buộc là hệ phương trình và/hoặc bất phương trình tuyến tính nên nếu sử dụng các phương pháp trong đại số tuyến tính thì ta có thể tận dụng các kết quả sẵn có của môn học này. Để có thể phân tích mô hình bài toán và xây dựng phương pháp giải theo xu hướng này, chúng ta cần một số khái niệm và định nghĩa liên quan tới bài toán.

2. Một số khái niệm và định nghĩa

Hàm f(x) gọi là hàm mục tiêu.

Hệ (1.2) đến (1.4) gọi là hệ ràng buộc (hệ điều kiện) của bài toán.

Với mỗi chỉ số $i \in I$ ta có một phương trình hoặc bất phương trình tương ứng và được gọi là ràng buộc thứ i.

Ứng với ràng buộc thứ i ta có vectơ (vectơ dòng) bao gồm thành phần là các hệ số a_{ij} của các biến x_j trong ràng buộc đó.

Ta kí hiệu vectơ này là A^*_i. Một nhóm ràng buộc có *hệ vectơ* A^*_i *tương ứng độc lập tuyến tính* được gọi là các *ràng buộc độc lập tuyến tính.*

Lưu ý rằng trong (1.3) và (1.4) có thể có những ràng buộc dạng đặc biệt: $x_j \geq 0$ hoặc $x_j \leq 0$. Các ràng buộc này gọi là các ràng buộc dấu đối với biến x_j. *Các ràng buộc dấu luôn là độc lập tuyến tính* vì vectơ A^*_j khi này chính là vectơ đơn vị thứ j. Do đặc điểm này của các ràng buộc dấu nên chúng thường được tách riêng để phân biệt với các ràng buộc khác.

Trong hệ (1.2) đến (1.4), xét các ràng buộc không phải là ràng buộc dấu, hệ vectơ A^*_i tương ứng với các ràng buộc này sẽ tạo thành một ma trận, kí hiệu là A. Ma trận A có n cột, vectơ

cột thứ j - kí hiệu là A_j - chính là vectơ các hệ số của biến x_j trong các ràng buộc (không kể ràng buộc dấu). A_j được gọi là vectơ điều kiện ứng với biến x_j.

Thí dụ 3.4: Xét bài toán QHTT sau đây:

$$f(x) = x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \Rightarrow \text{Min}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_5 \leq 40 \quad (1)$$

$$-2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_5 = 65 \quad (2)$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 12 \quad (3)$$

$$x_j \geq 0 \text{ với } j = 1 \div 5$$

Ta có: $A^*_1 = (1, 1, 1, 0, -1)$, $A^*_2 = (-2, -2, 5, 0, 2)$,

$A^*_3 = (0, 1, 1, 1, 2)$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Phương án: Một vectơ x thoả mãn hệ ràng buộc của bài toán gọi là một phương án của bài toán.

Để phân biệt tính chất của các ràng buộc (kể cả ràng buộc dấu) đối với một phương án cụ thể, ta sẽ đưa ra hai khái niệm: Ràng buộc chặt và lỏng.

- Nếu đối với phương án x mà ràng buộc i thoả mãn với dấu đẳng thức, nghĩa là: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ (hoặc $x_i = 0$, nếu là ràng buộc

dấu) thì ta nói phương án x thoả mãn *chặt* ràng buộc i hay ràng buộc i là *chặt* đối với phương án x.

- Nếu đối với phương án x mà ràng buộc i thoả mãn với dấu bất đẳng thức thực sự nghĩa là: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > (<) b_i$ hoặc $x_j > (<) 0$) (tuỳ thuộc ràng buộc dấu loại gì) thì ta nói phương án x thoả mãn *lỏng* ràng buộc i hay ràng buộc i là *lỏng* đối với phương án x. Lưu ý rằng nếu ràng buộc i có *dạng phương trình thì nó sẽ là chặt với mọi phương án* của bài toán; nếu ràng buộc có dạng bất phương trình thì nó có thể là chặt đối với phương án này và lỏng với phương án kia.

Thí dụ: Với thí dụ (1.4), xét hai vectơ: $x^1 = (0, 0, 13, 0, 0)$ và $x^2 = (0, 0, 1, 0, 30)$. Cả hai đều là phương án của bài toán. Các ràng buộc lỏng của x^1 là (1), (3) và $x_3 \geq 0$ còn của x^2 là (1) (3) và $x_3 \geq 0$, $x_5 \geq 0$.

Phương án tối ưu (phương án tốt nhất): Một phương án mà tại đó trị số hàm mục tiêu đạt cực tiểu (hoặc cực đại, tuỳ trường hợp cụ thể của f(x)) gọi là phương án tối ưu.

Phương án tốt hơn: Xét bài toán có $f(x) \Rightarrow$ Min (Max) và hai phương án x^1, x^2 của nó. Phương án x^1 gọi là tốt hơn phương án x^2 nếu: $f(x^1) \geq (\geq) f(x^2)$.

Nếu có các dấu bất đẳng thức thực sự thì gọi là tốt hơn thực sự. Từ thí dụ (1.4) ta thấy x^1 thực sự tốt hơn x^2.

Một bài toán có tồn tại phương án tối ưu gọi là bài toán giải được, nếu không có phương án tối ưu gọi là bài toán không giải được. Bài toán không giải được có thể do một trong hai nguyên nhân sau:

- Bài toán không có phương án.

- Bài toán có phương án, nhưng hàm mục tiêu không bị chặn dưới (nếu f(x) $\Rightarrow$ Min) hoặc không bị chặn trên (nếu f(x) $\Rightarrow$ Max) trên tập phương án, tức là trị số hàm mục tiêu giảm (tăng) vô hạn trên tập phương án, khi đó ta kí hiệu f(x) $\rightarrow -\infty(+\infty)$.

Trong số các phương án của bài toán, một số có đặc điểm riêng và đóng vai trò quan trọng trong việc xây dựng phương pháp giải bài toán. Chúng là các phương án cực biên (phương án cơ bản).

Phương án cực biên: Một phương án thoả mãn chặt n ràng buộc độc lập tuyến tính được gọi là phương án cực biên (PACB).

Chú ý rằng n trong định nghĩa trên là số biến số của bài toán.

Thí dụ: Xét thí dụ (3.1), ta có bài toán:

$$f(x) = x_1 + 6x_2 \Rightarrow \text{Max}$$

$$800.000\, x_1 + 400.000\, x_2 \leq 1.600.000$$

$$x_1 \geq 5$$

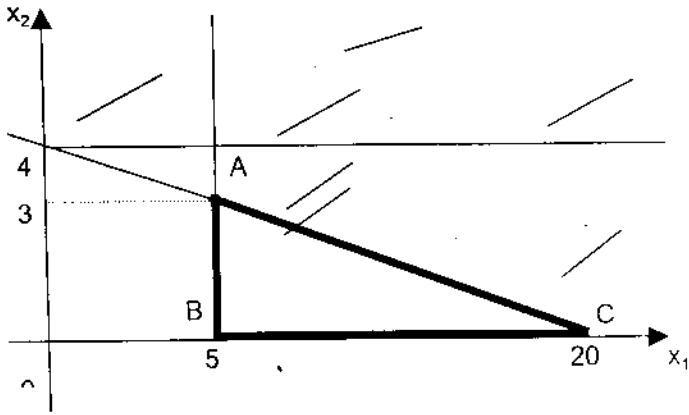
$$x_2 \geq 4$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Dễ dàng thấy rằng các phương án:

$x^A = (5,3)$, $x^B = (5, 0)$ và $x^C = (20, 0)$ là các PACB của bài toán.

Vì bài toán chỉ có 2 biến, các ràng buộc khá đơn giản ta có thể dùng đồ thị để biểu diễn tập phương án (miền phương án). Ta có hình vẽ dưới đây:



Hình 1

Trên hình 1, tập phương án của bài toán được thể hiện bởi tam giác ABC. Các PACB x^A, x^B, x^C sẽ ứng với các đỉnh A, B, C. Ngoài các PACB này, bài toán sẽ không có PACB khác (Vì sao)?).

Một bài toán có số ràng buộc (kể cả ràng buộc dấu, nếu có) ít hơn n thì chắc chắn sẽ không có phương án cực biên dù nó có phương án.

Phương án cực biên thoả mãn chặt đúng n ràng buộc gọi là **phương án cực biên không suy biến,** thoả mãn chặt hơn n ràng buộc gọi là **phương án cực biên suy biến.**

Với thí dụ 3.1, các phương án cực biên x^A, x^B, x^C đều không suy biến. Nếu tất cả các phương án cực biên của bài toán đều không suy biến thì bài toán gọi là không suy biến; trái lại, gọi là bài toán suy biến.

3. Các dạng đặc biệt của bài toán và các đặc điểm

a. Bài toán dạng chính tắc

Bài toán có dạng dưới đây gọi là bài toán QHTT dạng chính tắc:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \text{Min (Max)} \qquad (1.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1 \div m) \qquad (1.6)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1 \div n) \qquad (1.7)$$

Hệ ràng buộc của bài toán dạng chính tắc gồm hai nhóm, nhóm (1.6) là các ràng buộc dạng phương trình, còn nhóm ràng buộc bất phương trình (1.7) chỉ bao gồm các ràng buộc về dấu (ràng buộc không âm) đối với tất cả các biến. Từ cách viết của hệ phương trình (1.5) ta suy ra những cách biểu diễn khác của bài toán dạng chính tắc:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \text{Min (Max)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = b$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1 \div n)$$

trong đó: A_j là các vectơ điều kiện, $b \in R$

Bài toán cũng có thể viết dưới dạng ma trận:

$$f(x) = (c, x) \Rightarrow \text{Min (Max)}$$

$$Ax = b, x \geq 0$$

Chúng ta đề cập tới bài toán dạng chính tắc vì 2 lý do:

Thứ nhất, bằng các phép biến đổi dưới đây, mọi bài toán quy hoạch tuyến tính (dạng tổng quát) đều có thể biến đổi về

bài toán dạng chính tắc tương đương - theo nghĩa: Trị tối ưu của hàm mục tiêu trong hai bài toán là trùng nhau và từ phương án, phương án tối ưu của bài toán này suy ra phương án, phương án tối ưu của bái toán kia.

Các phép biến đổi bao gồm:

- Nếu có biến ràng buộc về dấu dạng $x_j \le 0$ ta đổi biến bằng cách đặt $x_j = x'_j$

-Nếu biến số x_j không có ràng buộc dấu, ta đặt:

$$x_j = x'_j - x''_j, \text{ với } x'_j, x''_j \ge 0$$

- Nếu một ràng buộc i có dạng $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ thì có thể thay bằng $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_i^p = b_i$ với $x_i^p \ge 0$, hệ số của x_i^p trong f(x) bằng 0, tương tự nếu ràng buộc i có dạng $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i$ thì thay bằng $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_i^p = b_i, x_i^p \ge 0$ và hệ số của x_i^p trong f(x) cũng cho bằng 0. Các biến x_i^p gọi là biến phụ (slack variables). Trong thực hành tính toán, khi sử dụng biến phụ ta đánh tiếp số thứ tự biến số, không dùng ký hiệu riêng.

Thí dụ: Với thí dụ 3.1, ta có bài toán dạng chính tắc tương đương là: $f(x) = x_1 + 6x_2 \Rightarrow \text{Max}$

$$\begin{aligned} 80.000\,x_1 + 400.000\,x_2 + x_3 &= 1.600.000 \\ x_1 - x_4 &= 5 \\ x_2 + x_5 &= 4 \end{aligned}$$

$$x_j \ge 0 \text{ với } j = 1 \div 5$$

Thứ hai, phương án của bài toán dạng chính tắc là một nghiệm với các thành phần không âm của hệ phương trình (1.6). Như vậy, trong việc tìm phương án, chúng ta có thể sử dụng - có cải tiến cho phù hợp - các phương pháp phân tích và giải hệ phương trình đã quen biết trong đại số tuyến tính. Hơn nữa, với bài toán dạng chính tắc, phương án cực biên của nó có đặc điểm - thể hiện trong định lý dưới đây - mà chúng ta có thể triệt để lợi dụng khi xây dựng phương pháp giải.

b. Đặc điểm của phương án cực biên của bài toán dạng chính tắc

ĐỊNH LÝ 1: *Phương án x của bài toán dạng chính tắc là cực biên khi và chỉ khi hệ thống các vectơ $\{A_j\}$ tương ứng với các thành phần dương của phương án là độc lập tuyến tính.*

Thí dụ 3.5: Xét bài toán QHTT:

$$\begin{array}{rccccccc} f(x) = & x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & \Rightarrow & \text{Max} \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \\ & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

$$x_j \geq 0 \ \forall j$$

Cho vectơ x = (2, 1, 0), chứng tỏ rằng x là PACB.

Giải: Vì bài toán có dạng chính tắc nên ta sẽ sử dụng định lý 1 để chứng tỏ x là PACB. Dễ dàng thấy rằng x là phương án. Các thành phần dương của x bao gồm $x_1 = 2$, $x_2 = 1$; các vectơ tương ứng là:

$A_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ $A_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Hai vectơ này độc lập tuyến tính vì định thức tương ứng khác không. Như vậy x là PACB.

Đối với bài toán dạng chính tắc, không làm mất tính chất tổng quát, ta sẽ giả thiết hệ phương trình ràng buộc gồm m phương trình độc lập, và m < n, tức là hạng A = m. Trường hợp m = n thì hệ phương trình ràng buộc có một nghiệm duy nhất, do đó bài toán hoặc không có phương án, hoặc chỉ có phương án duy nhất nên việc tìm phương án tối ưu trở thành không cần thiết. Với giả thiết này và nhờ định lý 1 ta thấy một phương án cực biên có không quá m thành phần dương, kết hợp với định nghĩa phương án cực biên suy ra phương án cực biên không suy biến có đúng m thành phần dương, còn phương án cực biên suy biến có ít hơn m thành phần dương.

c. Cơ sở của phương án cực biên

Vì dạng của ma trận A bằng m nên số vectơ điều kiện A_j độc lập tuyến tính cực đại là m, do đó bất kỳ phương án cực biên nào cũng tương ứng với ít nhất một hệ vectơ độc lập tuyến tính cực đại, từ đó có định nghĩa sau:

Định nghĩa: Cơ sở của phương án cực biên

Một hệ m vectơ $\{A_j\}$ độc lập tuyến tính bao hàm hệ thống các vectơ tương ứng với các thành phần dương của phương án cực biên x là cơ sở của phương án cực biên ấy, ký hiệu một cách quy ước là J, trong đó: J = {j: A_j thuộc cơ sở }.

Lưu ý rằng chúng ta chỉ định nghĩa cơ sở của PACB đối với các PACB của bài toán dạng chính tắc mà thôi. Đối với PACB của bài toán dạng tổng quát sẽ không có khái niệm này.

Một phương án cực biên không suy biến có đúng m thành phần dương, m vectơ A_j tương ứng độc lập tuyến tính nên có

một cơ sở duy nhất, đó chính là các vectơ tương ứng với các thành phần dương, còn phương án cực biên suy biến thì có thể có nhiều cơ sở khác nhau, phần chung của chúng là các vectơ tương ứng với các thành phần dương.

Tóm lại, khi ta nói phương án cực biên x (của bài toán dạng chính tắc) có cơ sở là J, cần phải hiểu (một cách quy ước) J có 3 nội dung sau:

- Số phần tử của J là m
- $\{A_j: j \in J\}$ độc lập tuyến tính
- $\{A_j: j \in J\} \supset \{A_j: x_j > 0\}$.

Đối với các thành phần của PACB x, ta sẽ gọi các thành phần x_j ($j \in J$) là thành phần cơ sở, x_k ($k \notin J$) là thành phần phi cơ sở, dễ dàng thấy rằng các thành phần phi cơ sở của phương án cực biên luôn bằng 0. Ngoài ra một phương án cực biên không suy biến thì mọi thành phần cơ sở đều dương, còn phương án cực biên suy biến thì ít nhất có một thành phần cơ sở bằng không. Đối với các biến của bài toán, ta cũng phân loại theo cơ sở J, ta sẽ gọi các biến x_j ($j \in J$) là các biến cơ sở, x_k ($k \notin J$) là các biến phi cơ sở.

Thí dụ: Với thí dụ 3.5, $x^1 = (2, 1, 0)$ là PACB không suy biến, có cơ sở $J = \{A_1, A_2\}$, các thành phần cơ sở là $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, thành phần phi cơ sở là $x_3 = 0$; các biến cơ sở là x_1, x_2, biến phi cơ sở là x_3. Ta cũng thấy vectơ $x^2 = (2, 0, 1)$ cũng là PACB không suy biến và có cơ sở $J_2 = \{A_1, A_3\}$, các thành phần cơ sở là $x_1 = 2$, $x_3 = 1$, thành phần phi cơ sở là $x_2 = 0$; các biến cơ sở là x_1, x_3 biến phi cơ sở là x_2.

d. Bài toán dạng chuẩn

Nếu bài toán dạng chính tắc trong đó $b_i \geq 0$ ($i = 1 \div m$) - tức là có vế phải không âm - và mỗi phương trình đều có một biến số với hệ số bằng 1, đồng thời biến này không có trong các phương trình khác (gọi là biến cô lập với hệ số bằng 1) gọi là bài toán dạng chuẩn. Bằng cách sắp xếp lại các biến cô lập (nếu cần) bài toán dạng chuẩn sẽ có dạng:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \text{Min (Max)}$$

$$x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + a_{1m+2}x_{m+2} + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + a_{2m+2}x_{m+2} + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_m + a_{mm+1}x_{m+1} + a_{mm+2}x_{m+2} + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1 \div n)$$

Từ hệ phương trình ràng buộc của bài toán dễ dàng suy ra một phương án: $x^0 = (b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, 0, \ldots, 0)$, đó là PACB với cơ sở $J^0 = \{e_1, e_2, \ldots, e_i, \ldots, e_m\}$ trong đó e_i là vectơ đơn vị thứ i. Cơ sở J^0 trong trường hợp này là cơ sở đơn vị.

Thí dụ 3.6: Cho bài toán QHTT:

$$\begin{array}{rrrrrrr} f(x) = & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \Rightarrow & \text{Min} \\ & x_1 & + & x_2 & & & = & 4 \\ & & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \end{array}$$

$$x_j \geq 0 \text{ với } \forall j$$

Rõ ràng bài toán trên có dạng chuẩn, PACB là $x^0 = (4, 0, 2)$, cơ sở $J^0 = \{e_1, e_2\}$

III. CÁC TÍNH CHẤT CHUNG CỦA BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Dưới đây chúng ta sẽ đề cập (không chứng minh) tới một số tính chất quan trọng của bài toán, sử dụng những tính chất này có thể lý giải nhiều tình huống mà không cần thiết phải giải bài toán.

Tính chất 1: Sự tồn tại phương án cực biên của bài toán

Nếu bài toán có phương án và hạng của ma trận hệ ràng buộc bằng n (n là số biến số) thì bài toán có phương án cực biên.

Dễ dàng thấy rằng hạng của ma trận hệ ràng buộc của bài toán dạng tổng quát trong đó tất cả các biến số đều có ràng buộc dấu, hoặc của bài toán dạng chính tắc luôn luôn bằng n nên nếu bài toán đó có phương án thì sẽ có phương án cực biên.

Thí dụ 3.7: Cho bài toán QHTT:

$$
\begin{aligned}
f(x) = \quad & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 && \Rightarrow \text{Min} \\
& -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 && \geq -16 \\
& \quad 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 && = 0 \\
& x_1 - 4x_2 \quad + 3x_4 - x_5 && \leq 34 \\
& 2x_1 \quad - 6x_3 + 2x_4 && \geq -2 \\
& && x_j \geq 0 \ (j = 1 \div 5)
\end{aligned}
$$

Chứng tỏ rằng bài toán có PACB.

Giải: Bài toán có phương án, ví dụ x = (0, 0, 0, 0, 0), hạng của ma trận hệ ràng buộc bằng 5 do có nhóm ràng buộc dấu đối

với cả 5 biến số. Theo tính chất trên suy ra bài toán có PACB.

Tính chất 2: Sự tồn tại phương án tối ưu của bài toán

Nếu bài toán có phương án và trị số hàm mục tiêu bị chặn dưới (trên) - khi f(x) ⇒ Min (Max) - trên tập phương án thì bài toán có phương án tối ưu.

Hơn nữa nếu biết bài toán có phương án cực biên thì với điều kiện trên, ta sẽ có kết luận mạnh hơn là bài toán có phương án cực biên tối ưu. Vì vậy đối với bài toán dạng chính tắc, tính chất trên có thể phát biểu:

- Nếu bài toán dạng chính tắc có phương án và trị số hàm mục tiêu bị chặn dưới (trên) - khi f(x) ⇒ Min (Max) - trên tập phương án thì bài toán có phương án cực biên tối ưu.

Thí dụ:

• Với thí dụ 3.7, ta đã chứng tỏ bài toán có PACB tối ưu.

Giải: Trong thí dụ 3.7, ta đã chứng tỏ bài toán có PACB.

Do ràng buộc về dấu nên ta có $f(x) \geq 0$, tức là f(x) bị chặn dưới trên tập phương án. Kết hợp lại, theo tính chất trên ta suy ra bài toán có PACB tối ưu.

• Với thí dụ 3.1, hãy chứng tỏ bài toán có PACB tối ưu, xác định phương án này.

Giải: Ở trên chúng ta đã chứng tỏ bài toán trong thí dụ 3.1 có PACB. Rõ ràng ta có:

$$f(x) = x_1 + 6x_2 \leq 80.000\ x_1 + 400.000x_2 \leq 1.600.000$$

Như vậy f(x) bị chặn trên. Suy ra bài toán có PACB tối ưu. Vì bài toán chỉ có 3 PACB là: $x^A = (5, 3)$, $x^B = (5, 0)$ và $x^C = (20, 0)$.

Tính giá trị của f(x) ứng với các phương án này và so sánh, ta được x^ là PACB tối ưu.

Tính chất 3: Tính hữu hạn của số phương án cực biên của bài toán

Số phương án cực biên của một bài toán quy hoạch tuyến tính là hữu hạn.

IV. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1. Nội dung của phương pháp

Xuất phát từ một phương án cực biên, ta tìm cách đánh giá phương án cực biên ấy, nếu nó chưa tối ưu thì tìm cách di chuyển sang một phương án cực biên mới tốt hơn, quá trình này được tiếp tục lặp lại. Vì số phương án cực biên (nếu có) của một bài toán là hữu hạn nên sau một số hữu hạn bước lặp, hoặc là ta sẽ kết luận bài toán không giải được vì hàm mục tiêu không bị chặn hoặc sẽ tìm được phương án cực biên tối ưu. Đó là nội dung cơ bản của phương pháp đơn hình.

Như vậy phương pháp chỉ áp dụng được cho những bài toán có phương án cực biên. Tuy nhiên, mọi bài toán quy hoạch tuyến tính đều có thể đưa về bài toán dạng chính tắc tương đương, và bài toán ban đầu có phương án khi và chỉ khi bài toán dạng chính tắc có phương án. Và khi bài toán dạng chính tắc đã có phương án thì sẽ có phương án cực biên. Do đó, không làm mất tính chất tổng quát, ta sẽ xét bài toán dạng chính tắc trong quá trình giới thiệu phương pháp đơn hình.

2. Cơ sở lí thuyết của phương pháp đơn hình - Các định lý cơ bản

Để xây dựng cơ sở lý thuyết nhằm thực hiện các định hướng trong nội dung của phương pháp đơn hình chúng ta cần phân tích quan hệ giữa phương án cực biên và phương án bất kỳ của bài toán. Thông qua mối quan hệ này ta có thể thiết lập một số định lý đóng vai trò trung tâm chẳng những về mặt đảm bảo lý thuyết cho phương pháp đơn hình mà còn chỉ dẫn cách thức thực hiện phương pháp.

a. Quan hệ giữa phương án cực biên và phương án của bai toán

Xét bài toán dạng chính tắc:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \text{Min (Max)} \qquad (1.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1 \div m) \qquad (1.6)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1 \div n) \qquad (1.7)$$

và cho x^0 là phương án cực biên với cơ sở J_0.

Ta sẽ ký hiệu vectơ bao gồm các thành phần cơ sở của PACB x^0 là X_{J_0} và ma trận các vectơ cơ sở là $A_{J_0} = [A_j: j \in J_0]$.

Khi đó vì $x^0_k = 0$ $(\forall k \notin J_0)$, từ hệ phương trình $Ax = b$ có thể viết $A_{J_0} X_{J_0} = b$, suy ra: $X_{J_0} = A^{-1}_{J_0} b$; đây là biểu thức phân tích b qua cơ sở J_0. Như vậy, các thành phần cơ sở của phương án cực biên chính là các hệ số phân tích của vectơ b theo cơ sở J_0. Mặt khác, các vectơ phi cơ sở A_k với $k \notin J_0$ cũng có thể phân tích theo cơ sở J_0. Gọi các hệ số phân tích của A_k là x_{jk}, vectơ hệ số phân tích tương ứng là X_k, như vậy:

$$A_k = \sum_{j \in J_0} x_{jk} A_j$$

và ta có công thức xác định X_k:

$$X_k = A_{J_0}^{-1} A_k \qquad (1.8)$$

Ta sẽ định nghĩa đại lượng $\Delta_k (k \notin J_0)$ bằng công thức sau:

$$\Delta_k = \sum_{j \in J_0} c_j x_{jk} - c_k \qquad (1.9)$$

và gọi nó là ước lượng của biến x_k theo cơ sở J_0.

Ký hiệu $c_J = \{c_j: j \in J_0\}$, khi đó có thể viết: $\Delta_k = (c_J, X_k) - c_k$, nói riêng thì $\Delta_j = 0$ $(j \in J_0)$, tức là ước lượng của biến cơ sở luôn bằng 0.

Cho $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ là một phương án bất kỳ của bài toán, khi đó bằng một số phép biến đổi có thể chứng tỏ giữa x^0 và x có mối quan hệ sau:

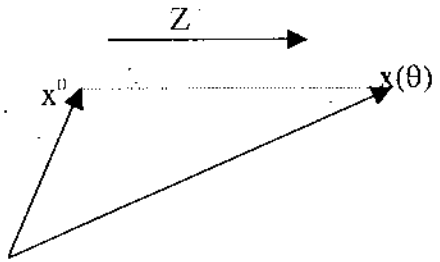
$$x_j = x^0_j - \sum_{j \in J_0} x_k x_{jk} \quad j \in J_0 \qquad (1.10)$$

Đồng thời trị số của hàm mục tiêu tương ứng với các phương án x^0 và x sẽ có mối liên hệ:

$$f(x) = f(x^0) - \sum_{j \in J_0} \Delta_k x_k \qquad (1.11)$$

Ngược lại, nếu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ và thoả mãn điều kiện (1.10) thì x sẽ là phương án của bài toán và khi này đối với x^0 và x ta vẫn có biểu thức (1.11). Từ nhận xét này ta có thể chọn tìm phương án x đáp ứng những yêu cầu đặt ra trước (thí dụ: phương án x có trị số f(x) lớn hơn hoặc nhỏ hơn so với $f(x^0)$, x cũng là phương án cực biên...). Cách lựa chọn này

gọi là sự di chuyển từ phương án cực biên x^0 tới phương án x. Về mặt trực quan sự di chuyển này chính là việc ta xuất phát từ x^0 di chuyển theo một phương $Z = (z_1, z_2,..., z_n)$ với bước di chuyển θ thích hợp. Ta có hình vẽ minh hoạ sự di chuyển:



Để có thể phân tích sâu hơn mối quan hệ giữa x^0 và x ta hãy xác định một số phương Z đặc biệt. Ứng với mỗi biến phi cơ sở x_k ta định nghĩa vectơ Z^k - và gọi là phương Z^k - có các toạ độ như sau:

$$z_j^k = \begin{cases} -x_{jk} & (j \in J_0) \\ 0 & (j \notin J_0, j \neq k) \\ 1 & (j = k, z_k^k = 1) \end{cases} \qquad (1.12)$$

Sự di chuyển theo phương Z^k giúp ta đơn giản hoá rất nhiều về mặt tính toán. Nếu xuất phát từ x^0 di chuyển theo phương Z^k với bước di chuyển θ, tức là xét các điểm có dạng:

$$x(\theta) = x^0 + \theta Z^k, \theta \geq 0 \qquad (1.13)$$

Khi đó để cho x(θ) là phương án chỉ cần $x(\theta) \geq 0$.

Với $j \in J_0$, $x_j(\theta) = x^0_j - \theta x_{jk} \geq 0$, còn với $j \notin J_0$, $j \neq k$ thì $x_j(\theta) = 0$, riêng $x_k(\theta) = \theta \geq 0$. Như vậy, để x(θ) là phương án thì chỉ cần:

$$x^0_j - \theta x_{jk} \geq 0 \ (j \in J_0).$$

+ Nếu $x_{jk} \leq 0$ $(\forall j \in J_0)$, khi đó bất đẳng thức trên thoả mãn với mọi trị số $\theta \geq 0$, nghĩa là $x(\theta)$ là phương án $\forall \theta \geq 0$. Ta gọi Z^k là phương vô hạn.

+ Nếu $\exists x_{jk} > 0$, khi từ các bất đẳng thức $x_j^0 - \theta x_{jk} \geq 0$ ứng với $x_{jk} = 0$, suy ra $\theta \leq x_j^0/x_{jk}$ do vậy: $\theta \leq \min \{x_j^0/x_{jk}\}$, lấy theo những $x_{jk} > 0$, gọi giá trị nhỏ nhất của những tỷ số này là θ_0. Như vậy $x(\theta)$ là phương án với điều kiện: $0 \leq \theta \leq \theta_0$. Trường hợp này Z^k gọi là phương hữu hạn, θ_0 là bước di chuyển lớn nhất theo phương này và $x(\theta_0)$ sẽ là phương án cực biên. Đồng thời ta cũng có:

$$f(x(\theta)) = f(x^0) - \theta\ \Delta_k \qquad (1.14)$$

Nếu $\Delta_k > 0$, suy ra $f(x(\theta)) < f(x^0)$, khi này phương Z^k gọi là phương giảm (vì di chuyển theo phương này trị số hàm mục tiêu sẽ giảm). Tương tự nếu $\Delta_k < 0$, Z^k gọi là phương tăng, nếu $\Delta_k = 0$, Z^k là phương không đổi.

Từ phân tích ở trên ta có thể tổng kết lại thành các định lý.

b. Các định lý cơ bản

ĐỊNH LÝ 2: **Dấu hiệu tối ưu của phương án cực biên**

Nếu đối với phương án cực biên x^0 với cơ sở J_0 của bài toán dạng chính tắc mà:

$\Delta_k \leq 0$ $(\forall k \notin J_0)$ [với bài toán có $f(x \Rightarrow Min]$ (A)

hoặc: $\Delta_k \geq 0$ $(\forall k \notin J_0)$ [với bài toán có $f(x) \Rightarrow Max]$ (B)

thì x^0 là phương án tối ưu.

Chú ý rằng điều kiện trong định lý 2 là điều kiện đủ, tuy nhiên nếu x^0 là PACB không suy biến thì đó cũng là điều kiện

cần để x^0 là phương án tối ưu. Dấu hiệu tối ưu chẳng những cho phép khẳng định được tính tối ưu của một phương án cực biên mà còn cho chúng ta biết phương án tối ưu đó có phải là duy nhất hay không. x^0 sẽ là phương án tối ưu duy nhất nếu:

$\Delta_k \leq 0$ ($\forall k \notin J_0$) với bài toán có $f(x) \Rightarrow$ Min

hoặc: $\Delta_k \geq 0$ ($\forall k \notin J_0$) với bài toán có $f(x) \Rightarrow$ Max

ĐỊNH LÝ 3: **Dấu hiệu bài toán không giải được**

Nếu đối với phương án cực biên x^0 với cơ sở J_0 của bài toán dạng chính tắc mà:

tồn tại $\Delta_k > 0$ mà $x_{jk} \leq 0$ ($\forall k \notin J_0$) [với $f(x \Rightarrow Min$] (A)

hoặc: tồn tại $\Delta_k < 0$ mà $x_{jk} \leq 0$ $\forall k \notin J_0$) [với $f(x) \Rightarrow Max$] (B)

thì bài toán sẽ không giải được (hàm mục tiêu không bị chặn trên tập phương án)

ĐỊNH LÝ 4: **Dấu hiệu điều chỉnh phương án cực biên**

Nếu đối với phương án cực biên x^0 với cơ sở J_0 của bài toán dạng chính tắc mà:

với mỗi $\Delta_k > 0$ đều tồn tại $x_{jk} > 0$ [với $f(x \Rightarrow Min$] (A)

hoặc: với mỗi $\Delta_k < 0$ đều tồn tại $x_{jk} > 0$ [với $f(x) \Rightarrow Max$] (B)

thì ta có thể điều chỉnh PACB x^0 để chuyển sang một phương án cực biên mới tốt hơn.

Để thuận tiện khi vận dụng các định lý trên trong quá trình giải bài toán QHTT, ta sẽ gọi các điều kiện trong những định lý này là:

- Dấu hiệu tối ưu (của PACB) - ứng với Định lý 2
- Dấu hiệu bài toán không giải được - ứng với Định lý 3
- Dấu hiệu điều chỉnh phương án - ứng với Định lý 4.

3. Thuật toán của phương án đơn hình - Thuật toán đơn hình

Để có thể kiểm tra các dấu hiệu trên đối với PACB, về mặt tính toán, chúng ta phải sử dụng các công thức (1.8) và (1.9). Ngoài ra, khi tiến hành điều chỉnh PACB – di chuyển từ phương án cực biên này sang phương án cực biên khác - thực chất là ta chuyển từ cơ sở này sang cơ sở khác và giữa chúng chỉ khác nhau bởi một vectơ. Vì vậy lợi dụng đặc điểm này cũng như các phép biến đổi ma trận, toàn bộ quá trình tính toán, kiểm tra các dấu hiệu và điều chỉnh phương án - toàn bộ quá trình giải bài toán - được xắp xếp theo một trình tự chặt chẽ, đảm bảo thuận tiện cho việc tính toán dù thủ công hay bằng lập trình. Trình tự đó được gọi là thuật toán đơn hình.

a. Nội dung của thuật toán đơn hình

Ta giả thiết bài toán cần giải là dạng chính tắc (nếu không, hãy dùng các phép biến đổi để chuyển về dạng chính tắc) và đồng thời đã biết một phương án cực biên x^0, cơ sở J_0.

Không làm mất tính chất tổng quát, có thể giả thiết J_0 gồm m vectơ đầu tiên: $J_0 = \{1, 2, ..., m\}$ tức là cơ sở gồm các vectơ: $\{A= A_1, A_2..., A_m\}$. Thuật toàn gồm các bước tiến hành như sau:

Bước 1: Lập bảng đơn hình ứng với PACB x^0

Bảng này ghi các số liệu liên quan tới x^0 mà ta sẽ sử dụng trong quá trình giải bài toán, bao gồm: Hệ số phân tích của vectơ b và các vectơ điều kiện A_k theo cơ sở J_0, các thành phần cơ sở của x^0, hệ thống Δ_j và các dữ liệu khác theo mẫu bảng dưới đây:

Bảng đơn hình

Hệ số	Cơ sở	Phương án	c_1 c_2 .... c_r .... c_m c_{m+1} c_{m+2} .... c_k .... c_s .... c_n x_1 x_2 .... x_r .... x_m x_{m+1} x_{m+2} .... x_k ..... x_s ..... x_n
c_1	x_1	x^0_1	1 0 ..... 0 .....0 x_{1m+1} x_{1m+2} .... x_{1k} ....x_{1s} ..... x_{1n}
c_2	x_2	x_2^0	0 1 .....0 .....0 x_{2m+1} x_{2m+2} .... x_{2k} .... x_{2s} ..... x_{2n}
...	.....	.....	.....
c_r	x_r	x^0_r	0 0 .... 1 .... 0 x_{rm+1} x_{rm+2} .... x_{rk} .. $[x_{rs}]$ ..... x_m
...	.....	.....	.....
c_m	x_m	x_m^0	0 0 .... 0 ..... 1 x_{mm+1} x_{mm+2} ....x_{mk} .. x_{ms} ..... x_{mn}
	f(x)	$f(x^0)$	0 0 .... 0 .... 0 Δ_{m+1} Δ_{m+2} .... Δ_{mk} .... Δ_s ..... Δ_n

Sau khi lập xong bảng, ta chuyển sang bước 2.

Bước 2: Kiểm tra dấu hiệu tối ưu của PACB

Dựa vào số liệu ghi ở dòng cuối của bảng đơn hình (từ cột thứ 4 trở đi).

Nếu: $\Delta_k \leq 0$ ($\forall k \notin J_0$) với bài toán có $f(x) \Rightarrow Min$

hoặc: $\Delta_k \geq 0$ ($\forall k \notin J_0$) với bài toán có $f(x) \Rightarrow Max$

thì x^0 là phương án tối ưu. Ta có trị tối ưu là $f(x^0)$. Quá trình giải kết thúc.

Nếu tồn tại một Δ_k mà: $\Delta_k > 0$ với bài toán có $f(x) \Rightarrow Min$

hoặc $\Delta_k < 0$ với bài toán có $f(x) \Rightarrow Max$

thì x^0 không phải là phương án tối ưu, chuyển sang bước 3.

Bước 3: Kiểm tra tính không giải được của bài toán

Nếu tồn tại: một $\Delta_k > 0$ mà $x_{jk} \leq 0$ với mọi $j \in J_0$ với bài toán có $f(x) \Rightarrow Min$

hoặc một $\Delta_k<0$ mà $x_{jk} \le 0$ với mọi $j \in J_0$ với bài toán có $f(x) \Rightarrow Max$

thì bài toán không giải được vì trị số hàm mục tiêu không bị chặn.

Nếu với mỗi $\Delta_k > 0$ đều có ít nhất một $x_{jk} > 0$ với bài toán có $f(x) \Rightarrow Min$ hoặc với mỗi $\Delta_k < 0$ đều có ít nhất một $x_{jk} > 0$ với bài toán có $f(x) \Rightarrow Max$ thì chuyển sang bước 4.

Bước 4: Điều chỉnh PACB và lập bảng đơn hình mới

• Chọn vectơ đưa vào cơ sở:

Tìm $Max\Delta_k$ với $\Delta_k > 0$ nếu bài toán có $f(x) \Rightarrow Min$, giả sử $Max\Delta_k = \Delta_s$ vectơ Δ_s được đưa vào cơ sở.

Tìm $Min\Delta_k$ với $\Delta_k < 0$ nếu bài toán có $f(x) \Rightarrow Max$, giả sử $Min\Delta_k = \Delta_s$ vectơ A_s được đưa vào cơ sở.

• Chọn vectơ đưa ra khỏi cơ sở:

Quy tắc áp dụng chung cho cả hai trường hợp: Bài toán có $f(x) \Rightarrow Min$ và bài toán có $f(x) \Rightarrow Max$

Tính $\theta_0 = \underset{x_{js}>0}{Min} \dfrac{x_j^0}{x_{js}}$,

Giả sử $\theta_0 = \dfrac{x_r^0}{x_{rs}}$ $(r \in J_0, x_{rs} > 0)$, vectơ A_r bị loại khỏi cơ sở, phần tử trục của phép biến đổi là x_{rs}, trong bảng đóng khung phần tử này.

• Biến đổi bảng:

Lập một mẫu bảng đơn hình mới, ở vị trí x_r ghi x_s và ghi c_s thay cho c_r.

Tính các dòng của bảng mới (bắt đầu từ cột thứ 3 trở đi) theo quy tắc sau:

- Để tính dòng ứng với vectơ đưa vào (ứng với x_s) trong bảng mới ta lấy dòng ứng với vectơ loại ra (ứng với x_r) trong bảng cũ chia cho phần tử trục. Dòng này được gọi là *dòng chuẩn*.

- Để tính dòng ứng với x_j trong bảng mới, ta lấy dòng x_j trong bảng cũ trừ đi dòng chuẩn sau khi nhân nó (dòng chuẩn) với x_{js}.

- Để tính dòng cuối của bảng mới, ta lấy dòng cuối của bảng cũ trừ đi dòng chuẩn sau khi nhân nó (dòng chuẩn) với Δ_s.

Kết quả của quá trình biến đổi sẽ cho ta bảng đơn hình ứng với phương án cực biên mới x^1, tốt hơn x^0. Sau bước điều chỉnh này hàm mục tiêu f(x) sẽ thay đổi một lượng bằng $\Delta_s\theta_0$. Đối với x^1 quay trở lại bước 1 và quá trình lặp lại sau một số hữu hạn bước hoặc kết luận bài toán không giải được vì hàm mục tiêu không bị chặn hoặc tìm được phương án cực biên tối ưu. Chú ý rằng trong quá trình tính toán, các bảng đơn hình được lập kế tiếp nhau để thuận tiện cho việc biến đổi

b. Các chú ý khi áp dụng thuật toán

• Nếu việc ghi nhớ các dấu hiệu trong cùng một lúc đối với cả hai trường hợp bài toán có $f(x) \Rightarrow$ Min và bài toán có $f(x) \Rightarrow$ Max là không thuận tiện thì ta có thể chỉ cần ghi nhớ một trường hợp, ví dụ trường hợp bài toán có $f(x) \Rightarrow$ Min.

Khi cần giải bài toán có $f(x) \Rightarrow$ Max thì có thể chuyển về giải bài toán với hàm $g(x) = -f(x) \Rightarrow$ Min (đổi dấu các hệ số trong hàm mục tiêu), chú ý là $f_{Max} = -g_{Min}$.

• Nếu khi chọn vectơ đưa vào cơ sở, hoặc đưa ra khỏi cơ sở có nhiều vectơ thuộc diện lựa chọn thì ta tuỳ chọn một trong số đó.

• Trường hợp bài toán suy biến thì θ_0 có thể bằng 0, khi $\theta_0 = 0$ vẫn thực hiện thuật toán một cách bình thường, nghĩa là vectơ ứng với θ_0 vẫn bị loại khỏi cơ sở.

• Khi áp dụng thuật toán cần lưu ý hai trường hợp:

- Phương án cực biên x^0 có cơ sở j_0 là cơ sở đơn vị, lúc đó ma trận hệ số phân tích của [b|A] theo cơ sở đơn vị là chính nó nên ta có thể lập ngay được bảng đơn hình. Bài toán dạng chuẩn là bài toán cho ngay một phương án cực biên với cơ sở là cơ sở đơn vị, nên từ bài toán ta có thể lập được bảng đơn hình ứng với phương án cực biên ấy.

- Khi J_0 không phải là cơ sở đơn vị thì để lập bảng đơn hình, trước hết cần phải tìm ma trận hệ số phân tích của [A|b] theo J_0. Để làm điều này, về mặt thực hành tính toán, ta viết ma trận mở rộng [A|b] và coi nó như một bảng số liệu. Sau đó thực hiện phép *biến đổi các dòng* của bảng này giống như phép biến đổi bảng đơn hình - biến đổi sao cho các vectơ cơ sở trở thành các vectơ đơn vị khác nhau - khi đó ma trận mở rộng sẽ trở thành ma trận hệ số phân tích.

c. Các thí dụ

Thí dụ 3.8: Giải bằng phương pháp đơn hình bài toán:

$$
\begin{aligned}
f(x) = 4x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 \quad &\Rightarrow \text{Min} \\
x_1 + x_3 + x_4 + 3x_5 \quad &= 16 \\
2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 \quad &\le 52 \\
x_2 + x_3 - 2x_5 \quad &\le 24 \\
x_j \ge 0 \ (j = 1 \div 4)
\end{aligned}
$$

Trước hết đưa bài toán về dạng chính tắc bằng cách cộng vào ràng buộc hai và ba hai biến phụ x_6 và x_7. Ta có:

$$f(x) = 4x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 \Rightarrow \text{Min}$$
$$x_1 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 16$$
$$2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 + x_6 = 52$$
$$x_2 + x_3 - 2x_5 + x_7 = 24$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1 \div 7)$$

Bài toán có dạng chuẩn, các biến cô lập là x_4, x_6, x_7 nên phương án cực biên tương ứng $x^0 = (0, 0, 0, 16, 0, 52, 24)$, cơ sở là: $\{A_4, A_6, A_7,\} = \{e^1, e^2, e^3\}$, do đó ta có thể lập ngay được bảng đơn hình ứng với phương án cực biên x^0.

Toàn bộ quá trình giải cho trong bảng 1. Từ bảng đơn hình đầu, ta thấy phương án tương ứng chưa tối ưu. Vectơ đưa vào cơ sở là A_2 ứng với $\Delta_2 = 2$, $\theta_0 = 20/1$ nên vectơ A_7 bị loại khỏi cơ sở, phần tử trục là 1 được đóng khung trong bảng.

Bảng 1

C_J	J	X_J	4 x_1	-2 x_2	1 x_3	-3 x_4	0 x_5	0 x_6	0 x_7
-3	x_4	16	1	0	1	1	3	0	0
0	x_6	52	2	-3	-2	0	2	1	0
0	x_7	24	0	[1]	1	0	-2	0	1
	f(x)	-48	-7	2	-4	0	-9	0	0
-3	x_4	16	1	0	1	1	3	0	0
0	x_6	124	2	0	1	0	-4	1	3
-2	x_2	24	0	1	1	0	-2	0	1
	f(x)	-96	-7	0	-6	0	-5	0	-2

Qua một bước điều chỉnh, ở bảng thứ hai ta thấy $\Delta_k \leq 0$ ($\forall k \notin J^*$), phương án tương ứng là tối ưu: $x^* = (0, 24, 0, 16, 0, 124, 0)$ và trị tối ưu của hàm mục tiêu là $f^* = -96$. Vì $\Delta_k < 0$ ($\forall k \notin J^*$) nên x^* là phương án tối ưu duy nhất.

Thí dụ 3.9: Giải bài toán sau bằng phương pháp đơn hình

$$f(x) = -2x_1 + 3x_2 + x_3 \Rightarrow \text{Max}$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 18$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 20$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 12$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1 \div 3)$$

Trước hết đưa bài toán về dạng chính tắc bằng cách cộng vào mỗi ràng buộc các biến phụ x_4, x_5 và x_6.

$$\text{Ta có : } f(x) = -2x_1 + 3x_2 + x_3 \Rightarrow \text{Max}$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 18$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = 20$$
$$x_1 + 2x_3 + x_6 = 12$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1 \div 6)$$

Bài toán có dạng chuẩn, các biến cô lập là x_4, x_5, x_6 nên phương án cực biên tương ứng $x^0 = (0, 0, 0, 18, 20, 12)$, cơ sở là: $\{A_4, A_5, A_6\} = \{e^1, e^2, e^3\}$, do đó ta có thể lập ngay được bảng đơn hình ứng với phương án cực biên x^0. Đặt $g(x) = -f(x)$.

Toàn bộ quá trình giải cho trong bảng 2.

Bảng 2

C_J	J	X_J	2 x_1	-3 x_2	-1 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6
0	x_4	18	2	-1	1	1	0	0
0	x_5	20	3	1	-2	0	1	0
0	x_6	12	1	[2]	0	0	0	1
	g	0	-2	3	1	0	0	0
0	x_4	24	5/2	0	[1]	1	0	1/2
0	x_5	14	5/2	0	-2	0	1	-1/2
	g	-18	-7/2	0	1	0	0	-3/2
-1	x_2	24	5/2	0	1	1	0	1/2
0	x_5	62	15/2	0	0	2	1	1/2
-3	x_2	6	1/2	1	0	0	0	1/2
	g	-42	-6	0	0	-1	0	-2

Vì $\Delta_k \leq 0$ ($\forall k \notin J^*$), phương án tương ứng với bảng đơn hình 3 là tối ưu (duy nhất).

$x^* = (0, 6, 24, 0, 62, 0)$, $g_{min} = -42$ suy ra $f_{max} = 42$

Thí dụ 3.10: Cho bài toán:

$$f(x) = -2x_1 - 6x_2 + 8x_3 - 5x_4 \Rightarrow \text{Min},$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 8 \quad (1)$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 \leq 2 \quad (2)$$

$$4x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 \geq 20 \quad (3)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1 \div 4)$$

và vectơ $x^0 = (8, 0, 0, 0)$.

a. Chứng tỏ x^0 là phương án cực biên, lợi dụng x^0 giải bài toán bằng phương pháp đơn hình.

b. Giải bài toán nếu thêm điều kiện $f(x) \geq -50$)

Giải: a. Dễ thấy rằng x^0 thoả mãn mọi ràng buộc của bài toán, thoả mãn chặt ràng buộc (1) và 3 ràng buộc dấu, chúng độc lập tuyến tính, vậy x^0 là phương án cực biên (không suy biến). Để giải bài toán bằng phương pháp đơn hình trước hết phải đưa ra bài toán về dạng chính tắc.

Ta có :
$$\begin{aligned} f(x) = -2x_1 - 6x_2 + 8x_3 - 5x_4 &\Rightarrow \text{Min}, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 8 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 &= 2 \\ 4x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 - x_6 &= 20 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1 \div 6) & \end{aligned}$$

Từ x^0 suy ra phương án cực biên không suy biến của bài toán dạng chính tắc $\overline{x^0} = (8, 0, 0, 0, 18, 12)$ với cơ sở là $J_0 = \{A_1, A_5, A_6\}$ không phải là cơ sở đơn vị. Vì vậy, để lập được bảng đơn hình ứng với phương án cực biên $\overline{x^0}$ ta phải tìm ma trận hệ số phân tích của ma trận điều kiện của bài toán dạng chính tắc qua cơ sở J_0. Chú ý rằng vế phải của ma trận hệ số phân tích phải trùng với các thành phần cơ sở của phương án cực biên.

Quá trình biến đổi thực hiện trên các ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -2 & 1 & 1 & -5 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & -8 & 2 & 0 & -1 & 20 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & -5 & -3 & 1 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

Trên cơ sở ma trận hệ số phân tích, lập bảng đơn hình, thực hiện quá trình giải. Toàn bộ quá trình này cho ở bảng 3.

Bảng 3

C_J	J	X_J	-2 x_1	-6 x_2	8 x_3	-5 x_4	0 x_5	0 x_6
-2	x_1	8	1	2	-3	1	0	0
0	x_5	18	0	5	-5	-3	1	0
0	x_6	12	0	1	-4	[2]	0	1
	fx)	-16	0	2	-2	3	0	0
-2	x_1	2	1	3/2	-1	0	0	-1/2
0	x_5	36	0	13/2	-11	0	1	3/2
-5	x_4	6	0	1/2	-2	1	0	1/2
	f(x)	-34	0	1/2	4	0	0	-3/2

Từ bảng cuối ta có $\Delta_3 = 4$, đồng thời $x_{j3} < 0$ $(\forall j \in J)$, bài toán không giải được vì hàm mục tiêu không bị chặn dưới.

b. Để giải bài toán khi có thêm điều kiện $f(x) \geq -50$ ta cần tìm một phương án x' của bài toán ban đầu sao cho $f(x') = -50$.

Gọi phương án tương ứng với bảng đơn hình 2 là x^*, từ x^* theo phương z^3 được các phương án có dạng: $x(\theta) = x^* + \theta z^3$, $\theta \geq 0$. Ta có $f(x(\theta)) = f(x^*) - \theta \Delta_3$. Suy ra:

$-50 = -34 - 4\theta$, như vậy $\theta = 4$.

Do $x^* = (2, 0, 0, 6, 36, 0)$; $z^3 = (1, 0, 1, 2, 11, 0)$, phương án cần tìm là: $x' = (6, 0, 4, 14, 80, 0)$.

4. Áp dụng thuật toán đơn hình tìm phương án cực biên

Nếu bài toán cần giải có dạng chính tắc nhưng không phải

dạng chuẩn và đồng thời ta không biết phương án cực biên, như vậy muốn áp dụng thuật toán cần phải tìm một phương án cực biên của bài toán này, Chúng ta có thể sử dụng thuật toán đơn hình để làm việc này.

Xét bài toán dạng chính tắc (I):

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \, (i = 1 \div m)$$

$$x_j \geq 0 (j = 1 \div n)$$

Không làm mất tính tổng quát có thể giả thiết $b_i \geq 0$ $(i = 1 \div m)$. Từ bài toán đã cho xây dựng một bài toán phụ, ký hiệu là P bằng cách cộng vào vế trái phương trình ràng buộc i một biến giả $x^g_i \geq 0$ $(i = 1 \div m)$ với hàm mục tiêu là tổng các biến giả đã thêm vào và hàm mục tiêu này phải đạt cực tiểu. Ký hiệu vectơ các biến giả là $x^g = (x^g_1, x^g_2, ..., x^g_m)$ và hàm mục tiêu của bài toán phụ là $P(x,x^g)$. Khi đó bài toán phụ (P) có dạng:

$$P(x, x^g) = \sum_{i=1}^{m} x_i^g \Rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_i^g = b_i \, (i = 1 \div m)$$

$$x_j \geq 0 (j = 1 \div n), x_i^g \geq 0 (i = 1 \div m)$$

Ta có thể thấy mối quan hệ giữa bài toán (I) và bài toán (P) qua các nhận xét:

• x là phương án của bài toán (I) khi và chỉ khi $(x, x^g = 0)$ là phương án của bài toán (P) và do đó x là phương án cực biên

của bài toán (I) khi và chỉ khi $(x, x^g = 0)$ là phương án cực biên của bài toán (P).

Như vậy, việc tìm phương án cực biên của bài toán (I), nếu có, sẽ dẫn tới tìm phương án của bài toán (P) có dạng $(x, x^g = 0)$, khi đó $P(x, x^g = 0) = 0$. Vì $P(x, x^g) \geq 0$, nên $(x, x^g = 0)$ chính là phương án tối ưu của bài toán (P). Nói cách khác việc tìm phương án cực biên của bài toán (P) dẫn tới giải bài toán (P). Bài toán (P) là bài toán dạng chuẩn và hàm mục tiêu bị chặn dưới nên luôn giải được. Dùng thuật toán đơn hình giải bài toán (P). Sau một số hữu hạn bước, ta sẽ tìm được phương án tối ưu $(\bar{x}, \bar{x}^g)$, ký hiệu $P(\bar{x}, \bar{x}^g) = P_{min}$. Có 2 trường hợp có thể xảy ra:

• Nếu $P_{min} > 0$, khi đó bài toán (I) không có phương án. Thật vậy, nếu giả sử bài toán (I) có phương án - x chẳng hạn - thì vectơ $(x, x^g = 0)$ là phương án của bài toán (P) và trị số của hàm mục tiêu tương ứng là:

$$P(x, x^g = 0) = 0 < P_{min}$$

mâu thuẫn với tối ưu của phương án $(\bar{x}, \bar{x}^g)$.

• Nếu $P_{min} = 0$) khi đó $\bar{x}_i^g = 0 (i = 1 \div m)$, $\bar{x}^g = 0$, phương án tối ưu có dạng:

$(\bar{x}, \bar{x}^g = 0)$, suy ra $\bar{x}$ là phương án cực biên của bài toán (I)

Để áp dụng được thuật toán cho phương án cực biên $\bar{x}$ cần phải biết cơ sở của nó. Hai trường hợp có thể xảy ra:

a. Trong cơ sở của phương án cực biên tối ưu $(\bar{x}, \bar{x}^g = 0)$ không có các vectơ tương ứng với các biến giả, khi đó cơ sở của phương án cực biên này cũng là cơ sở của phương án cực biên $\bar{x}$, để có bảng đơn hình tương ứng chỉ cần tính lại dòng các

ước lượng Δ_k theo hàm f và tiếp tục giải bài toán (I) theo thuật toán đơn hình.

b. Trong cơ sở của phương án cực biên tối ưu $(\bar{x}, \bar{x}^{s'} = 0)$ có ít nhất một vectơ biến giả, thành phần tương ứng $x^s_i = 0$, phương án cực biên là suy biến. Trường hợp này để tiếp tục giải bài toán (I), trước hết, ta loại các cột ứng với $\Delta_j(P) < 0$ (và các cột x^s_i phi cơ sở) ra khỏi bảng, sau đó tính lại các ước lượng Δ_k theo hàm f và tiếp tục thuật toán.

Khi lập và giải bài toán (P) cần chú ý một số điểm sau:

- Khi xây dựng bài toán phụ, ta chỉ cộng thêm biến giả vào những phương trình cần thiết (nhằm tạo ma trận điều kiện của bài toán phụ có đủ m vectơ đơn vị).

- Bài toán phụ (P) luôn có hàm mục tiêu $P \Rightarrow Min$ bất kể bài toán (I) có hàm mục tiêu $f(x) \Rightarrow Min$ hoặc $f(x) \Rightarrow Max$.

- Một biến giả đã bị loại khỏi cơ sở thì cột tương ứng không cần tính ở các bước tiếp sau.

- Nếu trong quá trình giải bài toán (P), ở một bước điều chỉnh nào đó mà tất cả các biến giả đều bị loại khỏi cơ sở thì ta có thể kết thúc việc giải bài toán (P) vì khi này ta đã tìm được APCB của bài toán (I). Để tiếp tục giải bài toán (I), trong bảng đơn hình mới, ta thay C_j vào cột đầu, tính lại dòng các ước lượng Δ_k theo hàm f và áp dụng các thủ tục của thuật toán đơn hình.

Như vậy chúng ta có thể dùng thuật toán đơn hình vừa để tìm PACB của bài toán QHTT vừa để giải chính bài toán đó. Quá trình này được tiến hành qua 2 giai đoạn (2 pha), giai đoạn đầu là tìm PACB - thông qua việc lập và giải bài toán phụ - giai đoạn sau là giải bài toán sau khi đã tìm được

PACB của nó. Chính vì lý do trên, thuật toán - áp dụng trong tình huống này - còn được gọi là thuật toán đơn hình 2 pha.

Thí dụ 3.11: Giải bài toán sau bằng phương pháp đơn hình:

$$\begin{aligned} f(x) = \; & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 && \Rightarrow \text{Min}, \\ & 2x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 && = 28 \\ & x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 && \leq 31 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 && = 16 \\ & x_j \geq 0 \; (j = 1 \div 4) \end{aligned}$$

Giải: Vì bài toán có dạng tổng quát do đó ta cần biến đổi về dạng chính tắc dưới đây:

$$\begin{aligned} f(x) = \; & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 && \Rightarrow \text{Min}, \\ & 2x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 && = 28 \\ & x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 && = 31 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 && = 16 \\ & x_j \geq 0 \; (j = 1 \div 5) \end{aligned}$$

Sau khi đưa về dạng chính tắc, ta thấy không phải dạng chuẩn nên thành lập bài toán phụ (P) với các biến giả x^g_1, x^g_2:

$$\begin{aligned} & P(x, x^g) = x^g_1 + x^g_3 \Rightarrow \min \\ & 2x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad + x^g_1 = 28 \\ & x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \qquad = 31 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad + x^g_3 = 16 \\ & x_j \geq 0 \; (j = 1 \div 5), \; x^g \geq 0 \end{aligned}$$

Áp dụng thuật toán đơn hình giải bài toán (P), quá trình giải thể hiện trong bảng 4.

Bảng 4

			3	4	2	2	0	/	1	1
c_J	J	x_J	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	/	x^g_1	x^g_3
1	x^g_1	28	2	2	0	1	0		1	0
0	x_5	31	1	5	3	-2	1		0	0
1	x^g_3	16	[2]	-2	2	1	0		0	1
	P	44	4	0	2	2	0		0	0
1	x^g_1	12	0	[4]	-2	0			0	1
0	x_5	23	0	6	2	-5/2			1	0
0	x_1	8	1	-1	1	1/2			0	0
	P	12	0	4	-2	0			0	0
4	x_2	3	0	1	-1/2	0			0	
0	x_5	5	0	0	5	-5/2			1	
3	x_1	11	1	0	1/2	1/2			0	
	f(x)	45	0	0	-5/2	-1/2			0	

Từ bảng đơn hình 2 chuyển sang bảng 3, vì tất cả các biến giả đều bị loại khỏi cơ sở nên phương án là phương án cực biên của bài toán xuất phát, dòng ước lượng không cần tính theo hàm P mà trực tiếp tính theo hàm f. Các ước lượng $\Delta_k \leq 0$, phương án tương ứng là tối ưu (duy nhất): $x^* = (11, 3, 0, 0, 5)$ và $f^* = 45$.

V. PHÂN TÍCH QUAN HỆ TRONG CẶP BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU VÀ ỨNG DỤNG

Bên cạnh mỗi bài toán QHTT - gọi là bài toán gốc - chúng ta sẽ xây dựng một bài toán QHTT khác theo các quy tắc nhất

luôn có một cặp bài toán QHTT được gọi là *cặp bài toán đối ngẫu*. Giữa hai bài toán trong cặp có mối quan hệ khăng khít với nhau, do đó từ những thông tin nhận được về một bài toán ta có thể có những kết luận tương ứng về bài toán còn lại. Khả năng này sẽ rất bổ ích đối với chúng ta khi cần phân tích hoặc giải bài toán. Chúng ta hoàn toàn có thể chọn bài toán có cấu trúc đơn giản hơn trong cặp bài toàn để xử lý. Ngoài ra, với những cặp bài toán đối ngẫu có nội dung thực tế, việc phân tích mối quan hệ giữa bài toán gốc và bài toán đối ngẫu sẽ đem lại những thông tin có ý nghĩa lý luận và thực hành. Chính vì vài trò quan trọng của cặp bài toán đối ngẫu nên ta sẽ đề cập tới chúng trong phần này.

1. Cách thành lập bài toán đối ngẫu

a. Cặp bài toán đối ngẫu không đối xứng

Xét bài toán dạng chính tắc (I):

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \text{Min(Max)} \qquad (1.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \, (i = 1 \div m) \qquad (1.6)$$

$$x_j \geq 0 (j = 1 \div n) \qquad (1.7)$$

Ta gọi bài toán này là bài toán gốc. Chú ý rằng hệ phương trình ràng buộc của bài toán còn có thể viết dưới dạng $\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = b$ hoặc Ax = b, trong đó A là ma trận điều kiện và A_j là các vectơ điều kiện. Dựa vào cấu trúc của bài toán gốc (I), ta xây dựng một bài toán quy hoạch tuyến tính khác gọi là bài toán đối ngẫu của bài toán (I) có dạng sau:

$$\begin{cases} \widetilde{f}(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \Rightarrow \text{Max(Min)} & (1.14) \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq (\geq)\, c_j (j = 1 \div n) & (1.15) \end{cases}$$

Ký hiệu bài toán này là $(\widetilde{I})$. Cặp bài toán $(I, \widetilde{I})$ gọi là cặp bài toán đối ngẫu không đối xứng.

Phân tích cấu trúc của hai bài toán, ta có thể rút ra những nhận xét đồng thời là những nguyên tắc thành lập bài toán đối ngẫu.

- Nếu $f(x) \Rightarrow Min$ thì $\widetilde{f}(y) \Rightarrow Max$ và hệ ràng buộc của bài toán đối ngẫu có dạng "$\leq$".

- Nếu $f(x) \Rightarrow Max$ thì $\widetilde{f}(y) \Rightarrow Min$ và hệ ràng buộc của bài toán đối ngẫu có dạng "$\geq$".

- Số ràng buộc (không kể ràng buộc dấu) trong bài toán này bằng số biến số trong bài toán kia, từ đó thấy tương ứng với một ràng buộc của bài toán này là một biến số của bài toán kia.

- Hệ số trong hàm mục tiêu của bài toán này là vế phải của hệ ràng buộc trong bài toán kia.

- Ma trận điều kiện trong hai bài toán là chuyển vị của nhau.

- Các biến số trong bài toán đối ngẫu không có ràng buộc về dấu.

Khi phân tích quan hệ của hai bài toán đối ngẫu cần sử dụng một khái niệm quan trọng sau:

Cặp ràng buộc đối ngẫu: Ta gọi 2 ràng buộc *bất đẳng thức*

(kể cả ràng buộc dấu) trong hai bài toán cùng *tương ứng với một chỉ số* là một cặp ràng buộc đối ngẫu. Trong hai bài toán (I) và ($\tilde{I}$) có n cặp ràng buộc đối ngẫu:

$$x_j \geq 0 \leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq (\geq) c_j \quad (j = 1 \div n).$$

Dùng các ký hiệu của bài toán gốc, bài toán đối ngẫu có thể viết dưới dạng:

$$\tilde{f}(y) = (b, y) \Rightarrow \text{Max(Min)}$$

$$(A_j, y) \leq (\geq) c_j \quad (j = 1 \div n)$$

Từ đây suy ra cách viết bài toán đối ngẫu một cách đơn giản: Trừ các ràng buộc về dấu, ta cho tương ứng với mỗi phương trình ràng buộc i của bài toán gốc một biến của bài toán đối ngẫu y_i (j = 1 ÷ m). thực hiện phép nhân vô hướng vectơ y lần lượt với vectơ b và các vectơ A_j (j = 1 ÷ n) ta sẽ được hàm mục tiêu và toàn bộ hệ ràng buộc của bài toán đối ngẫu.

Thí dụ 3.12: Viết bài toán đối ngẫu của bài toán sau:

$$f(x) = -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \Rightarrow \text{Max}$$

$$2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6x_4 - 2x_5 + 2x_6 = -14$$

$$-x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_5 - 4x_6 = 8$$

$$6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 + 3x_6 = 12$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1 \div 6)$$

Bài toán đối ngẫu có 3 biến số y_1, y_2, y_3. Theo cách viết trên ta có:

$$\tilde{f}(y) = -14y_1 + 8y_2 + 12y_3 \Rightarrow \text{Min}$$

$$\begin{aligned} 2y_1 - y_2 + 6y_3 &\geq -3 \\ -3y_1 + 2y_2 - 3y_3 &\geq 5 \\ -y_1 + 5y_2 + 2y_3 &\geq 4 \\ 6y_1 - y_3 &\geq -2 \\ -2y_1 + 3y_2 + y_3 &\geq 1 \\ 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

b. Cặp bài toán đối ngẫu đối xứng

Xét bài toán (II):

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \text{Min(Max)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq (\leq) b_i (i = 1 \div m)$$

$$x_j \geq 0 (j = 1 \div n)$$

Đưa bài toán về dạng chính tắc, ký hiệu là (II'):

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \text{Min(Max)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - (+) x_{n+i} = b_i (i = 1 \div m)$$

$$x_j \geq 0 (j = 1 \div n + m)$$

Bài toán đối ngẫu của (II') và cũng là đối ngẫu của (II) có dạng:

$$\tilde{f}(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \Rightarrow \text{Max(Min)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq (\geq) c_j (j = 1 \div n)$$

$$y_i \geq 0 (i = 1 \div m)$$

Ký hiệu bài toán này là $(I\tilde{I})$. Do đặc điểm cấu trúc của hai bài toán, ta gọi (II) và $(I\tilde{I})$ là cặp bài toán đối ngẫu đối xứng. Hai bài toán này có n + m cặp ràng buộc đối ngẫu sau:

$$x_j \geq 0 \leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq (\geq) c_j \ (j = 1 \div n).$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq (\geq) b_i \leftrightarrow y_i \geq 0 (i = 1 \div m)$$

c. Cặp bài toán đối ngẫu tổng quát

Theo quy tắc xây dựng có thể dễ dàng chứng minh nếu xem $(\tilde{I}), (I\tilde{I})$ là bài toán gốc thì các bài toán đối ngẫu của chúng chính là (I), (II). Vì vậy từ đây ta sẽ gọi chung hai bài toán đối ngẫu là một cặp bài toán đối ngẫu, khi cần thiết mới chỉ rõ bài toán gốc.

Đối với bài toán bất kỳ, đưa về bài toán dạng chính tắc, xây dựng bài toán đối ngẫu của bài toán này và gọi là bài toán đối ngẫu của bài toán đã cho. Chúng ta có thể sử dụng các quy tắc nêu trong lược đồ dưới đây để trực tiếp viết bài toán đối ngẫu mà không cần phải thực hiện bước biến đổi về dạng chính tắc.

Lược đồ tổng quát

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu
$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow$ Min(Max)	$\tilde{f}(y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \Rightarrow$ Max(Min)
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i = b_i \ (i\in I_1)$	y_i không có ràng buộc dấu $(i\in I_1)$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \geq (\leq) b_i \ (i\in I_2)$	$y_i \geq 0 \ (i\in I_2)$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \leq (\geq) b_i \ (i\in I_3)$	$y_j \leq 0 \ (i\in I_3)$
x_j không ràng buộc dấu $(j\in J_1)$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j \ (j\in J_1)$
$x_i \geq 0 \ (j\in J_2)$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq (\geq) c_j \ (j\in J_2)$
$x_j \leq 0 \ (j\in J_3)$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geq (\leq) c_j \ (j\in J_3)$

Từ lược đồ tổng quát có thể rút ra nhận xét hữu ích cho thực hành là: Nếu một biến số không có ràng buộc dấu trong bài toán này thì ràng buộc tương ứng trong bài toán kia có dấu bằng, và ngược lại; nếu một biến số có ràng buộc dấu trong bài toán này thì ràng buộc tương ứng trong bài toán kia có dấu bất đẳng thức và ngược lại, tuy nhiên cần chú ý rằng chiều của các bất đẳng thức của bài toán đối ngẫu được quyết định bởi hàm mục tiêu phải đạt cực tiểu hay cực đại.

Thí dụ 3. 23: Viết bài toán đối ngẫu của bài toán sau và chỉ ra các cặp ràng buộc đối ngẫu:

$$f(x) = -4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_5 \Rightarrow \text{Min}$$

$$3x_1 - 6x_2 - x_3 + 2x_4 - 4x_5 \geq -15 \quad (1)$$

$$-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 \leq 8 \quad (2)$$

$$-6x_2 + 3x_3 + 8x_4 - 4x_5 = 9$$

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 \geq 24 \quad (3)$$

$$x_1 \geq 0 \ (4), \quad x_3 \leq 0 \ (5), \quad x_5 \geq 0 \quad (6)$$

Bài toán đối ngẫu:

$$\tilde{f}(y) = -15y_1 + 8y_2 + 9y_3 + 24y_4 \Rightarrow \text{Max}$$

$$3y_1 - 2y_2 + 3y_4 \leq -4 \quad (7)$$

$$-6y_1 + 3y_2 - 6y_3 + 2y_4 = 1$$

$$-y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 5 \quad (8)$$

$$2y_1 - 5y_2 + 8y_3 - 3y_4 = 0$$

$$4y_1 + y_2 - 4y_3 + y_4 \leq 3 \quad (9)$$

$$-y_1 \leq 0 \quad (10)$$

$$y_2 \leq 0 \quad (11)$$

$$-y_4 \leq 0 \quad (12)$$

Các cặp ràng buộc đối ngẫu là: (1), (10); (2); (11); (3), (12); (4), (7); (5), (8) và (6), (9).

2. Phân tích quan hệ trong cặp bài toán đối ngẫu - Các ứng dụng

a. Các tính chất và định lý đối ngẫu

Mối quan hệ giữa hai bài toán trong cặp bài toán đối ngẫu mà chúng ta quan tâm là sự tồn tại phương án, phương án tối ưu của chúng và sự liên hệ giữa các phương án này.

Mối quan hệ đặc biệt này được thể hiện qua các tính chất và định lý đối ngẫu.

Xét cặp bài toán đối ngẫu (tổng quát) với các hàm mục tiêu:

$$f(x) \Rightarrow \text{Min (Max)} \qquad \tilde{f}(y) \Rightarrow \text{Max(Min)}$$

Tính chất 1: *Với mọi cặp phương án x và y của hai bài toán đối ngẫu ta luôn luôn có:* $f(x) \leq (\geq) \tilde{f}(y)$.

Tính chất 2: *Nếu đối với hai phương án* x^* *và* y^* *của một cặp bài toán đối ngẫu mà:*

$f(x^*) = \tilde{f}(x^*)$ *thì* x^* *và* y^* *tương ứng là hai phương án tối ưu.*

ĐỊNH LÝ 1 (ĐỐI NGẪU): *Nếu một trong hai bài toán đối ngẫu giải được thì bài toán kia cũng giải được và khi đó với mọi cặp phương án tối ưu* x^* *và* y^* *ta luôn luôn có* $f(x^*) = \tilde{f}(x^*)$.

Kết hợp hai tính chất trên và định lý 1 suy ra các hệ quả sau:

Hệ quả 1: *Điều kiện cần và đủ để hai bài toán đối ngẫu giải được là mỗi bài toán có ít nhất một phương án.*

Hệ quả 2: *Điều kiện cần và đủ để một bài toán có phương án còn một bài toán không có phương án là trị số của hàm mục tiêu của bài toán có phương án không bị chặn trên tập phương án của nó.*

Kết luận chung: Như vậy, đối với một cặp bài toán đối ngẫu chỉ xảy ra một trong ba trường hợp sau:

- *Cả hai bài toán đều không có phương án, cả hai đều không giải được.*

- *Cả hai đều có phương án thì cả hai đều giải được, khi đó*

với mọi cặp phương án tối ưu x^* và y^* ta luôn luôn có $f(x^*) = \tilde{f}(x^*)$.

Một bài toán có phương án còn một bài toán không có phương án, khi đó trị số của hàm mục tiêu của bài toán có phương án sẽ không bị chặn trên tập phương án của nó.

ĐỊNH LÝ 2 (ĐỐI NGẪU): *Điều kiện cần và đủ để hai phương án x và y của một cặp bài toán đối ngẫu tối ưu là trong các cặp ràng buộc đối ngẫu nếu một ràng buộc thoả mãn với dấu bất đẳng thức thực sự (lỏng) thì ràng buộc kia phải thoả mãn với dấu bằng (chặt).*

Với cặp bài toán đối ngẫu cụ thể, ta sẽ biết được các cặp ràng buộc đối ngẫu và do đó hoàn toàn có thể xác định được điều kiện cần và đủ trong định lý.

Hệ quả 1: *Nếu một ràng buộc là lỏng đối với một phương án tối ưu của bài toán này thì ràng buộc đối ngẫu của nó phải là chặt đối với mọi phương án tối ưu của bài toán kia.*

Hệ quả 2: *Xét cặp bài toán đối ngẫu (II, $\tilde{II}$) trong đó bài toán II có ràng buộc $x \geq 0$. Nếu cặp bài toán được và y^* là duy nhất thì khi vectơ b thay đổi một lượng Δb sao cho x^* vẫn là phương án của bài toán (sau khi thay đổi vectơ b), ta luôn có $\Delta f^* = (y^*, \Delta b)$ với Δf^* là sự thay đổi tương ứng của trị tối ưu của bài toán gốc.*

Suy ra, nếu chỉ có b_i thay đổi, ta sẽ có $\dfrac{\Delta f^*}{\Delta b_i} = y_i^*$.

b. Các ứng dụng

Sử dụng các tính chất và định lý đối ngẫu, đặc biệt là phần **Kết luận chung** và **Hệ quả của định lý 2** chúng ta có

thể xử lý các tình huống dưới đây mà không nhất thiết phải giải bài toán.

• *Khảo sát sự tồn tại phương án, phương án tối ưu:*

Thí dụ 3. 14: Cho bài toán QHTT:

$$\begin{aligned} f(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &\Rightarrow \text{Min} \\ x_1 - x_2 &= 15 \\ x_3 - x_4 &= 8 \\ x_j \geq 0 \text{ với } \forall j & \end{aligned}$$

Hãy viết bài toán đối ngẫu và chứng tỏ nó có PACB tối ưu.

Giải: Bài toán đối ngẫu:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) = 15y_1 + 8y_2 &\Rightarrow \text{Max} \\ y_1 &\leq 2 \\ -y_1 &\leq -1 \\ y_2 &\leq 3 \\ -y_2 &\leq -2 \end{aligned}$$

Dễ dàng thấy rằng $x = (15, 8)$ và $y = (1, 2)$ là các phương án của cặp bài toán đối ngẫu. Suy ra cặp bài toán có phương án tối ưu. Mặt khác, do hạng của hệ ràng buộc của bài toán đối ngẫu bằng 2 do đó nó có PACB tối ưu.

Thí dụ 3. 15: Cho bài toán QHTT:

$$\begin{aligned} f(x) = x_1 + 2x_2 + px_3 - 2x_4 + x_5 &\Rightarrow \text{Max} \\ 2x_1 - x_2 + x_4 - x_5 &\geq 4p + 1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &\leq 32 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_5 &= 18 \\ x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \text{ với p là tham số} & \end{aligned}$$

Hãy viết bài toán đối ngẫu và dựa vào bài toán này để biện luận theo tham số p về sự tồn tại phương án tối ưu của bài toán gốc.

Giải: Bài toán đối ngẫu của bài toán đã cho có dạng:

$$\tilde{f}(y) = (4p + 1)y_1 + 32y_2 + 18y_3 \Rightarrow \text{Min}$$

$$2y_1 + y_3 = 1 \quad (1)$$

$$-y_1 + y_2 - y_3 = 2 \quad (2)$$

$$-y_2 + y_3 \geq p \quad (3)$$

$$y_1 + 2y_2 \geq -2 \quad (4)$$

$$-y_2 - y_3 = 1 \quad (5)$$

$$y_1 \leq 0 \quad (6), \quad y_2 \geq 0 \quad (7)$$

Hệ phương trình tạo bởi 3 ràng buộc (1), (2) và (5) của bài toán đối ngẫu có nghiệm duy nhất là $y^0 = (-3, 6, 7)$. Nếu y^0 thoả mãn các ràng buộc khác của bài toán đối ngẫu thì nó sẽ là phương án duy nhất do đó sẽ là phương án tối ưu của bài toán này và khi ấy bài toán gốc cũng sẽ có phương án tối ưu. Rõ ràng y^0 thoả mãn (4), (6) và (7); do đó để là phương án, y^0 cần thoả mãn (3). Thay y^0 vào (3) ta được $p \leq 1$. Suy ra y^0 là phương án của bài toán đối ngẫu khi và chỉ khi $p \leq 1$. Tóm lại nếu $p \leq 1$ thì bài toán gốc có phương án tối ưu, nếu $p > 1$ bài toán sẽ không có phương án tối ưu.

• *Phân tích tính chất tối ưu của một phương án và xác định tập phương án tối ưu*

Sử dụng hệ quả của định lý đối ngẫu 2 ta có thể phân tích tính chất tối ưu của một phương án. Chẳng hạn hãy xét xem một phương án x của bài toán gốc có phải là phương án tối ưu hay

không. Giả sử x là phương án tối ưu thì theo định lý 2 đối ngẫu mọi phương án tối ưu y của bài toán đối ngẫu phải thoả mãn chặt các ràng buộc đối ngẫu với các ràng buộc mà phương án x thoả mãn lỏng. Tập hợp các ràng buộc chặt này tạo thành một hệ phương trình đối với y. Giải hệ phương trình này, nếu hệ vô nghiệm thì x không thể là phương án tối ưu. Nếu hệ có nghiệm thì phải thử các nghiệm đó vào các ràng buộc còn lại của bài toán đối ngẫu, nếu mọi nghiệm đều không phải là phương án thì x không thể là phương án tối ưu. Nếu có một nghiệm y của hệ phương trình là phương án của bài toán đối ngẫu thì x là phương án tối ưu, đồng thời phương án y cũng tối ưu. Như vậy nếu x là phương án tối ưu thì nhờ cách phân tích này ta xác định được toàn bộ tập hợp các phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Đồng thời nhờ một phương án tối ưu nào đó của bài toán đối ngẫu ta lại xác định được tập hợp phương án tối ưu của bài toán gốc. Ta sẽ minh hoạ ứng dụng này trên một thí dụ cụ thể.

Thí dụ 3. 16: Cho bài toán:

$$f(x) = 7x_1 + 6x_2 - 12x_3 + x_4 \Rightarrow \text{Max}$$

$$2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 8$$

$$3x_2 + 2x_3 - 2x_4 \leq -1$$

$$2x_1 - 3x_3 + x_4 = 10$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1 \div 4)$$

và vectơ $x^0 = (0, 6, 0, 10)$. Viết bài toán đối ngẫu. Phân tích các tính chất của x^0 đối với bài toán đã cho. Xác định tập phương án tối ưu của hai bài toán. Chỉ ra một phương án tối ưu không cực biên của bài toán gốc.

Giải: Bài toán đối ngẫu của bài toán đã cho:

$$\tilde{f}(y) = 8y_1 - y_2 + 10y_3 \Rightarrow \text{Min}$$

$$\begin{aligned} 2y_1 \quad + \quad 2y_3 \quad &\geq 7 \\ -2y_1 + 3y_2 \quad &\geq 6 \\ -3y_1 - 2y_2 - 3y_3 \quad &\geq -12 \\ 2y_1 - 2y_2 + y_3 \quad &\geq 1 \\ y_2 \quad &\geq 0 \end{aligned}$$

Dễ dàng thấy rằng x^0 thoả mãn mọi ràng buộc của bài toán, nó là phương án; phương án x^0 thoả mãn chặt các ràng buộc 1, 3 và 2 ràng buộc dấu, những ràng buộc này độc lập tuyến tính nên x^0 là phương án cực biên (không suy biến). Phương án x^0 thoả mãn lỏng ràng buộc 2 và 2 ràng buộc dấu. Giả sử phương án x^0 là tối ưu, theo định lý 2 mọi phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu phải thoả mãn:

$$\begin{aligned} -2y_1 + 3y_2 \quad &= 6 \\ 2y_1 - 2y_2 + y_3 &= 1 \\ y_2 \quad &= 0 \end{aligned}$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $y^0 = (-3, 0, 7)$. Thử y^0 vào ràng buộc 1 và 3 của bài toán đối ngẫu, ta thấy nó thoả mãn, y^0 là phương án, do vậy x^0 là phương án tối ưu đồng thời y^0 cũng là phương án tối ưu và hơn nữa là phương án tối ưu duy nhất.

Phương án tối ưu y^0 chỉ thoả mãn lỏng ràng buộc một nên mọi phương án tối ưu x phải thoả mãn:

$$\begin{aligned} x_1 \quad &= 0 \\ -2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \quad &= 8 \\ -3x_3 + x_4 \quad &= 10 \end{aligned}$$

Giải hệ phương trình với x_4 là ẩn tự do ta được nghiệm tổng quát:

$$x = (0, 1 + 1/2x_4, - 10/3+ 1/3x_4, x_4)$$

thử x vào các ràng buộc còn lại của bài toán gốc, cụ thể là:

$$3x_2 + 2x_3 - 2x_4 \leq - 1,$$

Suy ra: $3 + 3/2\ x_4 - 20/3 + 2/3\ x_4 - 2x_4 \leq - 1,$

Tức là: $x_4 \leq 16$, $x_2 = 1 + 1/2\ x_4 \geq 0$, suy ra: $x_4 \geq -2$,

$x_3 = -10/3 + 1/3x_4 \geq 0$, suy ra: $x_4 \geq 10$, $x_4 \geq 0$.

Kết hợp lại ta được $10 \leq x_4 \leq 16$. Với điều kiện này x là phương án đồng thời là phương án tối ưu của bài toán gốc.

Vậy tập phương án tối ưu của bài toán gốc là:

$x = (0, 1 + 1/2x_4, -10/3 + 1/3x_4, x_4)$ với $10 \leq x_4 \leq 16$

Cho, chẳng hạn, $x_4 = 13$ ta được một phương án tối ưu không cực biên:

$$x' = (0, 15/2, 1, 13)$$

Lưu ý rằng với $x_4 = 0$ ta được chính phương án cực biên tối ưu $x^0 = (0, 6, 0, 10)$.

Với $x_4 = 16$ sẽ được phương án cực biên tối ưu khác x^* (0, 9, 2, 16).

• *Phân tích so sánh tĩnh: Phân tích, đánh giá các nguồn lực sử dụng trong kinh tế và xác định giá tính toán của các nguồn (xác định giá mờ)*

Trong quá trình hoạt động nói chung và SX - KD nói riêng, chúng ta đều phải sử dụng các nguồn lực (nhân lực, vật lực và tài lực) - gọi tắt là các nguồn (Resources). Hầu hết các

nguồn đều trong tình trạng khan hiếm, đặc biệt đối với các nguồn trong môi trường tự nhiên. Như vậy, khi sử dụng, chúng ta phải gánh chịu chi phí cơ hội, phải trả một "giá" nhất định. Nếu như có sẵn một hệ thống giá của các nguồn - thí dụ giá thị trường - ta hoàn toàn có thể tính toán để sử dụng chúng một cách có hiệu quả. Tuy nhiên, trong thực tế có một số nguồn hoặc không thể định giá theo cơ chế thị trường vì chúng không được mua bán, trao đổi - ví dụ các nguồn thuộc loại hàng hoá công cộng - hoặc tuy có được định giá nhưng giá này không phản ánh đúng chi phí cơ hội đối với người sử dụng vì nó chưa tính tới hoặc chưa tính đủ tất cả những lợi ích, thiệt hại của họ khi sử dụng các nguồn. Trong tình huống này, để đánh giá các nguồn, chúng ta phải xác định giá tính toán (Accounting Price) của chúng. Giá này còn gọi là giá mờ, giá tham khảo (Shadow Price). Phương pháp xác định giá tính toán của các nguồn dựa vào lập luận sau đây của phương pháp phân tích cận biên (Marginal Analysis):

Giả sử một chủ thể sử dụng m loại nguồn với số lượng nhất định trong một hoạt động nhằm mục đích nhất định và đạt được một mức lợi ích - đo được bằng giá trị. Khi chủ thể cố định việc sử dụng các nguồn khác, chỉ tăng thêm mức sử dụng nguồn i 1 đơn vị, sẽ nhận được một mức lợi ích tăng thêm so với trước đó. Mức lợi ích tăng thêm này gọi là *giá tính toán* của nguồn i. Rõ ràng giá tính toán phản ánh chi phí cơ hội của việc sử dụng nguồn vì nó gắn với lợi ích của chủ sử dụng và nó có thể khác với giá thị trường của nguồn. Về thực chất, phân tích cận biên cũng chính là phân tích so sánh tĩnh vì phân tích này cho ta biết tác động của biến ngoại sinh (nguồn) tới biến nội sinh (mức lợi ích).

Nếu hoạt động có sử dụng nguồn của chủ thể được mô hình hoá bằng bài toán QHTT thì khi ta thay đổi b_i 1 đơn vị (nới lỏng, thắt chặt ràng buộc i), cùng với điều kiện trong Hệ quả 2 của định lý đối ngẫu 2, khi này theo hệ quả, giá trị của y^*_i trong phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu sẽ thể hiện sự thay đổi tương ứng của trị tối ưu. Do vậy giá trị này có thể xem là giá tính toán của nguồn i. Ta có thể minh hoạ điều này qua phân tích cặp bài toán đối ngẫu dưới đây. Để đơn giản hoá vấn đề, ta xét trường hợp bài toán có 2 biến và 2 ràng buộc. Trường hợp tổng quát cũng sẽ có kết quả hoàn toàn tương tự.

Giả sử một doanh nghiệp có thể sử dụng 2 loại nguồn - 1 và 2 - với số lượng cho trước là r_1 và r_2 để sản xuất 2 loại sản phẩm đem bán và thu lời. Do tình trạng công nghệ của doanh nghiệp, để sản xuất ra 1 đơn vị sản phẩm thứ j cần hao phí a_{ij} đơn vị nguồn thứ i.

Các hệ số này gọi là hệ số kỹ thuật và $a_{ij} > 0$ với i = 1,2; j = 1,2. Doanh thu có được từ việc sản xuất và bán 1 đơn vị sản phẩm thứ j là c_j (> 0). Hãy lập kế hoạch sản xuất cho doanh nghiệp trong phạm vi khả năng của các nguồn đồng thời doanh thu đạt cao nhất.

Từ tình huống trên, nếu ký hiệu x_1, x_2 là lượng sản phẩm thứ 1 và thứ 2 doanh nghiệp dự kiến sản xuất, ta có mô hình tương ứng sau đây:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \Rightarrow \text{Max}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le r_1 \qquad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le r_2 \qquad (2)$$

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0$$

Vế trái của (1) và (2) biểu thị mức sử dụng các nguồn 1 và 2 để thực hiện phương án sản xuất x. Như vậy các ràng buộc (1) và (2) là các hạn chế về khả năng của các nguồn doanh nghiệp sử dụng. Bài toán trên được gọi là bài toán phân bố sử dụng nguồn hiệu quả trong SX - KD.

Ta có bài toán đối ngẫu: $\widetilde{f}(y) = r_1 y_1 + r_2 y_2 \Rightarrow \text{Min}$

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \geq c_1 \quad (3)$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \geq c_2 \quad (4)$$

$$y_1 \geq 0, \qquad y_2 \geq 0$$

Ta có thể giải thích ý nghĩa của bài toán đối ngẫu như sau:

y_i là định giá của doanh nghiệp đối với 1 đơn vị nguồn i ($i = 1,2$)

Vế trái của (3) và (4) là chi phí cho việc sử dụng 2 nguồn để sản xuất 1 đơn vị sản phẩm 1 và 2 (chi phí được tính theo cách định giá nguồn của doanh nghiệp). Rõ ràng các ràng buộc (3) và (4) thể hiện tính hợp lý về mặt kinh tế: Đó là chi phí sản xuất 1 đơn vị sản phẩm (tính theo cách định giá nguồn của doanh nghiệp) phải không nhỏ hơn doanh thu từ một đơn vị này (để doanh nghiệp không lỗ).

Có thể chứng minh rằng cặp bài toán đối ngẫu trên luôn giải được. Ký hiệu phương án tối ưu và trị tối ưu của chúng là:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*),\ f = f(x^*);\ y^* = (y_1^*, y^*),\ \widetilde{f}^* = \widetilde{f}(y^*)$$

Theo định lý ngẫu 1 ta có $f^* = \widetilde{f}^*$, hoặc có thể viết:

$$f^* = r_1 y_1^* + r_2 y_2^* \qquad (5)$$

Nếu ta coi mức doanh thu cao nhất của doanh nghiệp (f^*) là

lợi ích của doanh nghiệp khi sử dụng các nguồn thì mức lợi ích này sẽ phụ thuộc vào khả năng của các nguồn - r_1 và r_2 - Từ biểu thức (5) ta có thể tính được mức lợi ích sẽ thay đổi như thế nào khi khả năng của các nguồn thay đổi nhờ các đạo hàm riêng $\frac{\partial f^*}{\partial r_i}$.

Các đạo hàm riêng này chính là giá tính toán của các nguồn. Theo (5) ta có giá tính toán của nguồn i là y_i^*. Ta cũng có được kết quả này nếu áp dụng hệ quả 2 của định lý đối ngẫu 2.

Chú ý:

+ Nếu ràng buộc i có dạng ≥, tức là chủ thể buộc phải sử dụng nguồn i không ít hơn một mức cho trước, khi này y_1^* có thể âm, việc nới lỏng ràng buộc i sẽ làm tăng f^* một lượng bằng $|y_1^*|$.

+ Ta có thể giải thích tác động của việc thắt chặt ràng buộc cũng tương tự như trên nhưng theo chiều hướng ngược lại đối với f^*.

Thí dụ 3. 17: Với thí dụ 3.1 về bài toán xác định chương trình quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình (đơn vị tiền tệ: nghìn đồng), ta có bài toán gốc:

$$f(x) = x_1 + 6x_2 \Rightarrow \text{Max}$$
$$80x_1 + 400x_2 \le 1.600 \quad (1)$$
$$x_1 \ge 5 \quad (2)$$
$$x_2 \le 4 \quad (3)$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Bài toán đối ngẫu có dạng:

$$\tilde{f}(x) = 1.600y_1 + 5y_2 + 4y_3 \Rightarrow \text{Min}$$
$$80y_1 + y_2 \ge 1 \quad (4)$$

$$400y_1 + y_3 \geq 6 \quad (5)$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\quad y_3 \geq 0$$

Các phương án tối ưu là $x^* = (5,3)$; $y^* = (0,015)$; - 0,2; 0) và $f^* = 23$.

Ta có thể giải thích ý nghĩa kinh tế của kết quả:

+ Khi công ty tăng thêm 1 nghìn đồng cho chi phí quảng cáo (nới lỏng ràng buộc (1) 1 đơn vị) thì sau khi điều chỉnh lại phương án quảng cáo, hiệu quả của quảng cáo (f^*) sẽ tăng thêm là 0,015 đơn vị (vì $y^*_1 = 0,015$). Theo quan điểm của công ty 1 nghìn đồng chi phí cho quảng cáo đáng giá 0,015.

+ Khi đài phát thanh nới lỏng giới hạn thời lượng quảng cáo 1 phút (chỉ còn là 4 phút) thì hiệu quả quảng cáo tăng 0,2.

+ Khi đài truyền hình tăng giới hạn thời lượng quảng cáo thêm 1 phút (nới lỏng ràng buộc (2) 1 đơn vị) thì hiệu quả của quảng cáo sẽ không thay đổi.

VI. BÀI TOÁN VẬN TẢI

Tại phần I của chương 3, ở thí dụ 3.1 chúng ta đã xét bài toán QHTT dạng đặt biệt - bài toán vận tải - với các số liệu cụ thể. Trong phần này, ta sẽ đưa ra mô hình tổng quát của bài toán vận tải đồng thời làm quen với phương pháp giải phù hợp với đặc điểm cấu trúc của bài toán này.

1. Nội dung và đặc điểm

a. Nội dung kinh tế và mô hình toán học

Đặt vấn đề: Giả sử tại một thời điểm và trên một khu vực kinh tế nhất định có m địa điểm có một loại hàng hoá thuần

nhất và có thể cung ứng cho n địa điểm có nhu cầu về loại hàng hoá đó. Trong trường hợp cụ thể m nơi có hàng có thể là chỗ sản xuất hoặc lưu trữ, n nơi có nhu cầu có thể là các địa chỉ tiêu thụ, sử dụng, lưu trữ khác. Hàng hoá có thể là loại vật chất thông thường nhưng cũng có thể là loại đặc thù như vốn, lao động, thông tin... Ký hiệu m nơi cung là A_i ($i = 1 \div m$) và gọi chúng là những trạm phát, n nơi cầu là Bj ($j = 1 \div n$) và gọi là những trạm thu. Lượng hàng hoá cung ứng ở trạm phát A_i là a_i đơn vị (tấn, chẳng hạn) và lượng hàng hoá yêu cầu ở trạm thu B_j là b_j đơn vị. Các số a_i, b_j gọi là yêu cầu của trạm i, j tương ứng.

Ta giả thiết chi phí để thực hiện việc cung một đơn vị hàng hoá từ trạm phát A_i đến trạm thu B_j là c_{ij} ($c_{ij} \geq 0$). Khái niệm chi phí được hiểu theo nghĩa rộng với một quy ước nhất định, có thể đó là chi phí thực, cũng có thể là độ dài quãng đường nối A_i và B_j hoặc lượng hao phí nhiên liệu hoặc thời gian cần thiết để vận chuyển v.v... Vấn đề đặt ra là hãy xác định một phương án thực hiện việc cung ứng hàng hoá - phương án vận chuyển hàng hoá - sao cho đáp ứng đầy đủ yêu cầu của các trạm thu bằng tất cả các hàng hoá có ở các trạm phát với tổng chi phí thực hiện - chi phí vận chuyển - là nhỏ nhất. Đây chính là nội dung và ý nghĩa kinh tế của bài toán.

Mô hình hoá: Gọi x_{ij} là lượng hàng hoá vận chuyển từ trạm phát A_i đến trạm thu B_j, hiển nhiên $x_{ij} \geq 0$ ($\forall i, j$). Yêu cầu của mọi trạm thu đều thoả mãn đầy đủ nghĩa là: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j (j = 1 \div n)$; hàng hoá ở tất cả các trạm phát đều được sử dụng để thoả mãn yêu cầu của các trạm thu nên $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i (i = 1 \div m)$. Như vậy, tổng chi phí vận chuyển sẽ là

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$. Ta có mô hình bài toán sau và được gọi là bài toán vận tải:

Tìm hệ thống $\{x_{ij}\}$ $(i = 1 \div m;\ j = 1 \div n)$ sao cho:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \Rightarrow \text{Min} \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1 \div m) \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1 \div n) \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1 \div m, \quad j = 1 \div n) \qquad (4)$$

Tên gọi của bài toán hàm ý tôn trọng lịch sử vì trong quá khứ những ứng dụng ban đầu đúng là được sử dụng để giải quyết một số tình huống trong lĩnh vực vận tải. Tuy nhiên càng về sau, phạm vi ứng dụng càng được mở rộng sang nhiều lĩnh vực khác.

Dễ thấy rằng nếu $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, tức là tổng lượng hàng hoá có thể cung ứng - tổng lượng phát - và tổng lượng yêu cầu về hàng hoá ấy - tổng lượng thu - không bằng nhau thì bài toán không thể có phương án, vì vậy ta sẽ giả thiết $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ và khi đó gọi là bài toán vận chuyển cân bằng thu phát.

Tuy nhiên, trong thực tế hầu như thường xuyên ta gặp các bài toán không cân bằng thu phát. Trường hợp $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, thì để

thoả mãn yêu cầu của các trạm thu không nhất thiết phải sử dụng toàn bộ hàng hoá có ở các trạm phát nên trong mô hình bài toán phải thay hệ ràng buộc (2) bằng hệ ràng buộc bất đẳng thức:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \qquad (i = 1 \div m) \qquad (2')$$

Trong trường hợp trái lại $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, phải thay hệ (3) bằng hệ:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j \qquad (j = 1 \div n) \qquad (3')$$

Bài toán vận tải không cân bằng thu phát không phải là bài toán QHTT dạng chính tắc, nhưng dùng thủ thuật biến phụ luôn luôn quy được về bài toán dạng chính tắc, nghĩa là về bài toán cân bằng thu phát. Vì vậy, từ đây ta chỉ xét bài toán cân bằng thu phát.

Về mặt lý thuyết, ta có thể áp dụng thuật toán đơn hình để giải bài toán. Tuy nhiên nếu áp dụng một cách máy móc, ta có thể gặp khó khăn trong tính toán khi số lượng biến của bài toán khá lớn dù số trạm thu, phát không lớn. Vì vậy ta sẽ xây dựng một phương pháp riêng, chuyên dụng để giải bài toán vận tải trong đó áp dụng linh hoạt thuật toán đơn hình phù hợp với đặc điểm cấu trúc của bài toán.

b. Các đặc điểm của bài toán

** Sự tồn tại phương án cực biên tối ưu:*

- Bài toán cân bằng thu phát luôn có phương án cực biên tối

ưu. Thật vậy, do bài toán có dạng chính tắc nên nếu nó giải được thì sẽ có phương án cận biên tối ưu.

Bài toán luôn giải được vì:

+ Trị số hàm mục tiêu bị chặn dưới: Do $c_{ij} \geq 0$ ($\forall i, j$) nên với mọi phương án $x = \{x_{ij}\}$ ta có: $f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \geq 0$.

+ Bài toán luôn có phương án: ký hiệu $d = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, xác định tập hợp $\{x_{ij}\}$ như sau: $x_{ij} = a_i b_j / d$ ($i = 1 \div m$; $j = 1 \div n$).

Rõ ràng $x_{ij} > 0$ ($\forall i, j$), ngoài ra:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \sum_{j=1}^{n} b_j / d = a_i \qquad (i = 1 \div m)$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_j \sum_{j=1}^{n} a_i / d = b_j \qquad (j = 1 \div n)$$

Như vậy $\{x_{ij} = a_i b_j / d\}$ ($i = 1 \div m$, $j = 1 \div n$) là một phương án của bài toán.

** Mô tả bài toán dưới dạng bảng và đặc điểm của phương án cận biên:*

Do cấu trúc hệ ràng buộc khá đặc biệt nên ta có thể mô tả bài toán dưới dạng bảng (bảng 5). Cách mô tả này mang tính trực giác cao và rất thuận tiện cho việc thể hiện trực quan phương án cực biên và tìm lời giải của bài toán. Ta xây dựng một bảng gồm m hàng và n cột theo mẫu ở bảng 5. Mỗi hàng đặc trưng cho một trạm phát, mỗi cột đặc trưng cho một trạm thu, trên hàng hoặc cột ghi yêu cầu của trạm tương ứng.

Trên bảng, giao của hàng i và cột j gọi là ô (i,j). Ô (i,j) đặc trưng cho đoạn đường nối trạm phát A_i và trạm thu B_j nên ở ô này ta ghi c_{ij}. Mỗi ô (i,j) còn tương ứng với một biến số x_{ij} và do đó tương ứng với vectơ điều kiện $\{A_{ij}\}$. Với cách mô tả bài toán dưới dạng bảng, ta có thể thể hiện các số liệu của một phương án trên bảng như sau: Cho $x = \{x_{ij}\}$ $(i = 1 \div m;\ j = 1 \div n)$ là phương án của bài toán. Nếu $x_{ij} > 0$ thì ta ghi giá trị này vào góc dưới phía phải của ô (i,j), nếu $x_{ij} = 0$ thì ta không ghi.

Bảng 5

Thu / Phát	b_1	b_2	.....	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	.....	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	.....	c_{2n}
.....	.....	.....	.....	.....
a_m	c_{m1}	c_{m2}	.....	c_{mn}

Như vậy, ứng với một phương án ta có một tập hợp ô tương ứng với các thành phần dương của phương án. Nếu phương án x là cực biên thì hệ vectơ điều kiện $\{A_{ij}\}$ tương ứng với $x_{ij} > 0$ sẽ độc lập tuyến tính và điều này chắc sẽ có liên quan tới đặc tính của tập các ô này. Để tìm ra đặc tính, ta hãy xét một số đặc điểm của bảng tương ứng với bài toán vận tải.

Ta gọi vòng là một tập hợp ô trên bảng mà trong đó mỗi ô đều nằm cùng hàng (cùng cột) chỉ với một ô đứng trước đó, đồng thời nằm cùng cột (cùng hàng) chỉ với một ô đứng sau nó. Như vậy, từ định nghĩa ta thấy một hàng hoặc một cột mà vòng

đi qua thì phải và chỉ qua hai ô, do đó tổng số ô trên vòng là một số chẵn và ít nhất là 4 ô. Một tập hợp không chứa vòng gọi là tập ô không tạo thành vòng. Người ta đã chứng minh được rằng:

ĐỊNH LÝ 5: **Đặc điểm của phương án cực biên**

Phương án $x = \{x_{ij}\}$ $(i = 1 \div m;\ j = 1 \div n)$ là phương án cực biên khi và chỉ khi tập hợp các ô (i,j) tương ứng với $x_{ij} > 0$ không tạo thành vòng.

Vì hạng của ma trận hệ ràng buộc bằng m+n-1 nên một phương án cực biên có tối đa m+n-1 thành phần dương và do đó số tối đa các ô không tạo thành vòng trong bảng m hàng và n cột cũng là m+n-1. Nếu x là phương án cực biên, ta gọi tập hợp m+n-1 ô không tạo vòng bao hàm tập ô tương ứng với các thành phần dương của x ($x_j > 0$) là tập ô cơ sở (ô chọn), các ô còn lại gọi là ô phi cơ sở (ô loại) của phương án cực biên ấy. Dễ thấy rằng nếu phương án cực biên x không suy biến thì nó chỉ có một tập ô cơ sở duy nhất, đó chính là tập ô ứng với các thành phần dương, nếu suy biến thì có nhiều tập ô cơ sở khác nhau, phần chung của chúng là tập ô ứng với các thành phần dương. Từ đây khi nói tới phương án cực biên ta luôn luôn gắn nó với tập ô cơ sở, tương tự như cơ sở của phương án cực biên của bài toán dạng chính tắc. Lợi dụng đặc điểm cấu trúc và cách thể hiện bài toán dưới dạng bảng, dưới đây ta sẽ nghiên cứu phương pháp khá đơn giản để tìm phương án cực biên của bài toán vận tải.

2. Xây dựng phương án cực biên

a. Nguyên tắc phân phối tối đa

Trong quá trình xây dựng phương án cực biên, khi xác định

được trị số của $x_{ij} = \alpha$, ta nói đã phân phối cho ô (i,j) một lượng hàng là α và ghi α vào ô này.

Lấy một ô (i,j) bất kỳ của bảng và phân phối cho nó một lượng hàng tối đa có thể, nghĩa là đặt $x_{ij} = \min \{a_i, b_j\}$. Ba trường hợp có thể xảy ra:

- Nếu $x_{ij} = a_i$, yêu cầu của trạm phát A_i được thoả mãn, loại hàng i ra khỏi bảng, sửa lại yêu cầu của trạm thu: $b_j' = b_j - a_i$.
- Nếu $x_{ij} = b_j$, yêu cầu của trạm thu B_j được thoả mãn, loại cột j ra khỏi bảng, sửa lại yêu cầu của trạm phát: $a_i' = a_i - b_j$.
- Nếu $x_{ij} = a_i = b_j$, yêu cầu của cả trạm phát và thu đều thảo mãn, đồng thời loại hàng i và cột j ra khỏi bảng.

Như vậy, mỗi lần phân phối cho một ô, quy mô của bài toán giảm dần. Tiếp tục quá trình cho tới khi yêu cầu của mọi trạm thu và phát đều thoả mãn.

Các ô được phân phối có $x_{ij} > 0$, đặc $x_{ij} = 0$ đối với những ô không được phân phối, khi đó tập hợp $\{x_{ij}\}$ $(i = 1 \div m,\ j = 1 \div n)$ thu được là một phương án của bài toán vì chúng thoả mãn mọi ràng buộc. Hơn nữa nó còn là phương án cực biên. Nếu kết quả của quá trình phân phối cho tổng số ô được phân phối là m+n-1 thì phương án cực biên tương ứng không suy biến, nếu ít hơn m+n-1 thì đó là phương án cực biên suy biến. Trường hợp không suy biến thì tập ô được phân phối chính là tập ô cơ sở. Trường hợp suy biến thì để có được một tập ô cơ sở cần phải bổ sung, ô bổ sung có $x_{ij} = 0$ và không tạo thành vòng với những ô cơ sở đã có (ô được phân phối), bổ sung cho tới khi đủ m+n-1 ô. Với những ô bổ sung khác nhau ta sẽ được các tập ô cơ sở khác nhau của cùng một phương án cực biên suy biến.

b. Các phương pháp xây dựng phương án cực biên

Sử dụng nguyên tắc phân phối tối đa, tuỳ thuộc vào cách ưu tiên phân phối ta có những phương pháp khác nhau để xây dựng phương án cực biên.

+ Phương pháp góc tây - bắc:

Luôn ưu tiên phân phối cho ô nằm ở góc tây - bắc của bảng. Phương pháp này không quan tâm tới chi phí mà thực hiện máy móc theo sự bố trí các trạm trên bảng. Rõ ràng về mặt ý nghĩa kinh tế thì phương án thu được rất bất hợp lý, tuy nhiên nhờ tính chất máy móc nó lại rất thuận tiện khi giải bài toán trên máy tính điện tử.

+ Phương pháp chi phí nhỏ nhất (đường gấn):

Luôn ưu tiên phân phối cho ô có c_{ij} nhỏ nhất trong bảng đang xét. Phương pháp này tỏ ra hợp lý hơn vì đã tính đến mức chi phí khi vận chuyển, nơi nào chi phí thấp sẽ vận chuyển trước, như vậy phương án cực biên thu được có nhiều khả năng gần với phương án tối ưu. Ta sẽ xét quá trình thực hiện phương pháp trên một thí dụ.

Thí dụ 3.18:

Bảng 6

Phát \ Thu	30	20	25	35	40
30	13 x	7 x	6 x	2 [30]	12 x
20	5 x	1 [20]	10 x	5 x	11 x
40	10 x	5 [0]	3 x	7 [5]	14 [35]
60	6 [30]	3 x	2 [25]	11 x	10 [5]

Kết quả phân phối cho phương án cực biên với 7 ô được phân phối, phương án cực biên là suy biến. Để có tập ô cơ sở cần phải bổ sung 1 ô như trong bảng 6, trị số $x_{ij} = 0$ của ô bổ sung cũng được đặt trong ngoặc vuông vì nó sẽ trở thành ô cơ sở. Dĩ nhiên có thể chọn nhiều ô khác làm ô bổ sung, có thể chẳng hạn là các ô (2,1) hoặc (1,2) hoặc (4,2)... Nói chung để thuận tiện, nên chọn ô bổ sung là một trong số các ô nằm trên hàng hoặc cột ứng với ô được phân phối mà đồng thời làm thoả mãn yêu cầu của cả trạm phát và trạm thu.

3. Phương pháp thế vị giải bài toán vận tải

Chúng ta sẽ đề cập tới một phương pháp khá đơn giản nhưng rất hiệu quả để giải bài toán vận tải trên cơ sở phân tích quan hệ của cặp bài toán đối ngẫu. Về bản chất thì đây là một hình thức thể hiện độc đáo của phương pháp đơn hình áp dụng cho bài toán vận tải có cấu trúc hết sức đặc biệt.

a. Bài toán đối ngẫu và tiêu chuẩn tối ưu

Xét bài toán vận tải:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \Rightarrow \text{Min} \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1 \div m) \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1 \div n) \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1 \div m, j = 1) \qquad (4)$$

Ký hiệu u_i, v_j là những biến đối ngẫu ứng với các hệ ràng buộc (2), (3); $u = \{u_i\}$, $v = \{v_j\}$ $\tilde{f}(u, v)$ là hàm mục tiêu của bài

toán đối ngẫu, đồng thời để tiện cho việc giải thích ý nghĩa kinh tế, ta đổi dấu hệ ràng buộc (2). Khi đó bài toán đối ngẫu có dạng:

$$\widetilde{f}(u, v) = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \Rightarrow \text{Max}$$

$$v_j - u_i \le c_{ij} \ (\forall i, j)$$

Trong cặp bài toán đối ngẫu này có m×n cặp ràng buộc đối ngẫu:

$$x_{ij} \ge 0 \text{ và } v_j - u_i \le c_{ij} \ (i = 1 \div m, j = 1 \div n)$$

Từ định lý 2 đối ngẫu suy ra:

ĐỊNH LÝ 6: *Điều kiện cần và đủ để phương án $x = \{x_{ij}\}$ của bài toán vận tải tối ưu là tồn tại hệ thống số $\{u_i, v_j\}$ thoả mãn:*

a) $v_j - u_i \le c_{ij} \ (\forall i, j)$

b) $v_j - u_i = c_{ij}$ *nếu* $x_{ij} > 0$

Định lý 6 gọi là tiêu chuẩn tối ưu đối với phương án của bài toán vận tải. Trị số của các u_i, v_j trong tiêu chuẩn gọi là các thế vị hàng và cột. Ta có thể giải thích ý nghĩa kinh tế của các thế vị như sau: Có thể xem các thế vị hàng u_i là giá trị của một đơn vị hàng hoá ở nơi sản xuất A_i, còn v_j là giá trị của nó tại nơi tiêu thụ B_j. Điều kiện b) có nghĩa là trong mọi phương án vẫn chuyển tối ưu nếu hàng hoá được đưa từ trạm phát A_i đến trạm thu B_j thì giá trị của nó tại nơi tiêu thụ B_j phải bằng giá trị tại nơi sản xuất A_i cộng thêm chi phí vận chuyển c_{ij}. Điều kiện a) có nghĩa là chênh lệch của giá trị hàng hoá giữa nơi tiêu thụ và nơi sản xuất bất kỳ đều không vượt quá chi phí vận chuyển trực tiếp giữa hai nơi ấy, điều này là hiển nhiên trong thực tiễn kinh tế.

b. Thuật toán của phương pháp thế vị

Dựa trên tiêu chuẩn tối ưu, ta xây dựng thuật toán giải bài toán vận tải, thực hiện một cách đơn giản ngay trên bảng mô tả bài toán. Giống như trong phương pháp đơn hình, ở đây cũng xuất phát từ một phương án cực biên, đánh giá nó và tìm cách chuyển sang một phương án cực biên khác tốt hơn. Quá trình lặp lại và vì bài toán luôn giải được nên sau một số hữu hạn bước sẽ đi tới phương án cực biên tối ưu với giả thiết bài toán không suy biến. Toàn bộ quá trình tính toán thực hiện theo trình tự sau.

Bước 1: Xây dựng phương án cực biên

Sử dụng một trong những phương pháp xây dựng phương án cực biên đã biết, thí dụ phương pháp chi phí nhỏ nhất, xây dựng phương án cực biên x^0 với đủ m+n-1 ô cơ sở, ký hiệu tập ô này là S_0. Sau đó chuyển bước 2.

Bước 2: Xây dựng hệ thống thế vị $\{u_i,v_j\}$

Quá trình xây dựng hệ thống thế vị được thực hiện như sau: Lấy một hàng i bất kỳ, cho nó một thế vị u_i tuỳ ý (thường là cho bằng 0 để dễ tính). Các thế vị hàng và cột còn lại xác định theo công thức:

$$v_j = u_i + c_{ij} \quad u_i \text{ đã biết và } (i,j) \in S_0, \qquad (5)$$

$$u_i = v_j - c_{ij}, \quad v_j \text{ đã biết và } (i,j) \in S_0. \qquad (6)$$

Vì S_0 gồm m+n-1 ô không tạo vòng nên nhờ hai công thức trên sẽ tính được m+n-1 thế vị khác nhau, cùng với thế vị u_i cho trước ta được toàn bộ thế vị hàng và cột. Sau đó chuyển sang bước 3.

Bước 3: Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu

Theo cách xây dựng, hệ thống thế vị $\{u_i, v_j\}$ thoả mãn điều

kiện b) đối với các ô cơ sở $(i,j) \in S_0$ do đó chỉ cần kiểm tra điều kiện a) đối với các ô phi cơ sở $(i,j) \notin S_0$. Nếu $v_j - u_i \le c_{ij}$, $\forall (i,j) \notin S_0$ thì phương án x^0 tương ứng là tối ưu. Nếu có một ô phi cơ sở - $(i,j) \notin S_0$ - mà $v_j - u_i > c_{ij}$, nghĩa là không thoả mãn tiêu chuẩn tối ưu thì hiển nhiên phương án x^0 chưa tối ưu. Ta sẽ gọi những ô này là ô vi phạm. Tính đại lượng $\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$ đối với các ô vi phạm, rõ ràng $\Delta_{ij} > 0$. Chuyển sang bước 4.

Bước 4: Điều chỉnh phương án

Giả sử $\underset{\Delta_{ij}>0}{Max}\,\Delta_{ij} = \Delta_{rk}$. Ô (r,k) được lấy làm ô điều chỉnh, tất nhiên ô $(r,k) \in S_0$. Vì S_0 là số ô tối đa không tạo thành vòng nên ô (r,k) sẽ tạo thành một vòng duy nhất với một số ô thuộc S_0. Tìm vòng này và ký hiệu là V, trên vòng đánh dấu lẻ chẵn xen kẽ nhau bắt đầu từ ô (r,k) là ô lẻ. Ký hiệu V_L, V_C - tập hợp ô lẻ, chẵn trên V.

Tìm Min x_{ij}^0 với $(i,j) \in V_C$. Giả sử Min $x_{ij}^0 = x_{st}^0 = q$.

$(i,j) \in V_C$

Rõ ràng $q \ge 0$ và q gọi là lượng điều chỉnh.

Thực hiện phép biến đổi số trên vòng V theo công thức:

$$x_{ij}^1 = \begin{cases} x_{ij}^0, & (i,j \notin V) \\ x_{ij}^0 + q, & (i,j \in V_L) \\ x_{ij}^0 - q, & (i,j \in V_C) \end{cases} \qquad (7)$$

Như vậy, sau khi điều chỉnh, ô điều chỉnh (r,k) sẽ trở thành ô cơ sở còn ô (s,t) ứng với q sẽ trở thành ô phi cơ sở của phương án cực biên mới x^1. Phương án này tốn hơn x^0 vì trị số hàm mục tiêu sẽ giảm một lượng bằng $q\Delta_{rk}$. Đối với x^1 quay trở lại bước

2, quá trình lặp lại sau một số hữu hạn bước sẽ tìm được phương án cực biên tối ưu.

Khi áp dụng thuật toán thế vị ta cần chú ý một số điểm:

+ Khi có nhiều ô có thể được chọn là ô điều chỉnh thì ta tuỳ chọn một trong số các ô này.

+ Trường hợp bài toán suy biến: Trường hợp suy biến thì q có thể bằng 0. Khi q = 0 vẫn thực hiện thuật toán một cách bình thường, nghĩa là ô điều chỉnh sẽ trở thành ô cơ sở với tư cách là ô bổ sung, còn ô ứng với q sẽ trở thành ô phi cơ sở. Tuy nhiên, kết quả điều chỉnh không làm thay đổi phương án cực biên mà chỉ chuyển từ tập ô cơ sở này sang một tập ô cơ sở khác. Dấu hiệu xuất hiện phương án cực biên suy biến là trong quá trình điều chỉnh q đạt tại nhiều ô khác nhau, những ô này đều có thể loại khỏi tập ô cơ sở. Nhưng theo thuật toán khi đó ta sẽ chỉ loại một trong số những ô ứng với q theo quy tắc ngẫu nhiên, những ô còn lại ứng với q vẫn nằm trong tập ô cơ sở với tư cách là các ô bổ sung.

+ Nếu phương án cực biên tối ưu x^* có $v_j - u_i < c_{ij}$ với mọi ô phi cơ sở thì x^* là phương án tối ưu duy nhất, trái lại x^* tối ưu không duy nhất.

Thí dụ 3.19: Bằng phương pháp thế vị, giải bài toán vận tải với các số liệu được cho dưới đây:

Bảng 7

Phát \ Thu	76	62	88	45	40
179	10	19	9	6	8
102	13	11	8	7	4
70	12	17	10	5	3
60	12	18	18	7	9

Giải:

- Kẻ bảng gồm 4 hàng, 5 cột ghi các số liệu có từ bảng 7, dùng phương pháp chi phí nhỏ nhất xây dựng phương án cực biên xuất phát, đó là phương án cực biên không suy biến, tập ô được phân phối chính là tập ô cơ sở, ta được bảng 8 tương ứng:

Bảng 8

	76	62	88	45	40
79	10 [64]	19 .	9	6 [15]	8
102	13	11 [14]	8 [88]	7	4
70	12	17	10	5 [30]	3 [40]
60	12 [12]	18 [48]	18	7	9

Cho $u_4 = 0$ lần lượt tính được các thế vị hàng và cột khác theo (5) và (6). Các thế vị hàng và cột được ghi vào bên trái mỗi hàng và phía trên mỗi cột. Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu đối với các ô phi cơ sở. Đối với các ô vi phạm tính $\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij} > 0$ và ghi nó vào ô tương ứng với dấu cộng phía trước, cụ thể là $\Delta_{13} = +4$, $\Delta_{33} = +2$, $\Delta_{44} = +1$.

Max $\Delta_{ij} = \Delta_{13} = +4$, ô(1,3) được lấy làm ô điều chỉnh

$\Delta_{ij} > 0$

Tìm vòng tạo bởi ô (1,3) với các ô cơ sở, đồng thời đánh dấu * cho các ô lẻ, dấu (*) cho các ô chẵn trên vòng. Kết quả trên bảng 9:

Bảng 9

		12	18	15	8	6
	Thu / Phát	76	62	88	45	40
2	79	10(*) [64]	19	9* +4	6 [15]	8
7	102	13	11* [14]	8(*) [88]	7	4
3	70	12	17	10 +2	5 [30]	3 [40]
0	60	12* [12]	18(*) [48]	18	7 +1	9

Xác định q = Min {88; 48; 64} = 48 ứng với ô (4,2)

Thực hiện phép biến đổi (7) đối với các ô trên vòng, nghĩa là tăng q cho ô lẻ và giảm q ở ô chẵn.

Bảng 10

		12	14	11	8	6
	Thu / Phát	76	62	88	45	40
2	79	10* [16]	19	9 +4	6(*) [15]	8
3	102	13	11 [62]	8 [40]	7	4
3	70	12	17	10	5 [30]	3 [40]
0	60	12(*) [60]	18	18	7* +1	9

q = Min {15; 60} = 15 ứng với ô (1,4).

Tiếp tục thuật toán với bảng 10, sau khi điều chỉnh ta được phương án ghi trong bảng 11.

Bảng 11

		12	14	11	7	5
	Phát \ Thu	76	62	88	45	40
2	79	10 [31]	19	9 [48]	6	8
3	102	13	11 [62]	8 [40]	7	4
2	70	12	17	10	5 [30]	3 [40]
0	60	12 [45]	18	18	7 [15]	9

Sau khi xây dựng hệ thống thế vị và kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu ta thấy:

$$v_j - u_i \le c_{ij} \; \forall (i,j) \notin S.$$

Phương án tương ứng là tối ưu (duy nhất). Dễ dàng tính được trị tối ưu của hàm mục tiêu:

$$f(x^*) = 10.31 + 9.48 + 11.62 + 8.40 + 5.30 + 3.40 + 12.45 + 7.15$$
$$= 2659$$

Bài tập chương III

1. Cho bài toán QHTT

$$f(x) = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \Rightarrow \text{Min}$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$
$$x_j \geq 0 \text{ với } \forall j$$

Không giải, hãy chứng minh bài toán có PACB tối ưu.

2. Cho bài toán QHTT

$$f(x) = x_1 + 4x_2 + px_3 \Rightarrow \text{Min}$$
$$3x_1 + 11x_2 + 4x_3 \leq 10$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = -1$$
$$x_j \geq 0 \text{ với } \forall j \text{ trong đó p là tham số}$$

Không giải, hay chứng minh bài toán có PACB tối ưu với mọi $p \geq 0$.

3. Cho bài toán

$$f(x) = 2x_1 - x_2 + 4x_3 \Rightarrow \text{Max}$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1$$
$$3x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 12$$
$$x_1 + 2x_3 \leq 10$$
$$x_j \geq 0 \text{ với } \forall j$$

a. Chứng minh bài toán có phương án tối ưu.

b. Với $f(x) \Rightarrow Min$, chứng minh bài toán không có **phương** án tối ưu. Khi đó hãy chỉ ra một dãy các phương án trên **đó f(x)** giảm vô hạn.

4. Chứng minh bài toán sau luôn có phương án tối **ưu**

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \Rightarrow Min\ (Max)$$

$$A_i^* x \le b_i\ (i = 1...m)$$

$$x_j \ge 0\ (j = 1...n)$$

Trong đó: $b_i \ge 0$ với mọi i và tồn tại s có $a_{si} > 0$ với mọi j, $b_s > 0$.

5. Cho bài toán QHTT

$$f(x) = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \Rightarrow Min$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 \le p$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 0$$

$x_j \ge 0$ với $\forall j$ trong đó p là tham số

Không dùng thuật toán, chứng minh bài toán có PACB **tối** ưu với mọi $p \ge 0$. Hãy xác định PACB tối ưu.

ĐS. $x^* = (p, 0, 0)$.

6. Cho bài toán QHTT

$$f(x) = x_1 + 4x_2 + x_3 \Rightarrow Max$$

$$4x_1 + 11x_2 + 3x_3 \ge -7$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$x_j \le 0 \text{ với } \forall j$$

Không dùng thuật toán, hãy chứng minh bài toán có PACB tối ưu. Hãy xác định PACB tối ưu.

ĐS. $x^* = (0, 0, 0)$.

7. Cho bài toán QHTT

$$f(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \Rightarrow \text{Min}$$

$$x_1 - x_2 = p$$

$$x_3 - x_4 = p + 1$$

$x_j \le 0$ với $\forall j$ trong đó p là tham số

Không dùng thuật toán, chứng minh bài toán có PACB tối ưu với mọi $p > 0$. Hãy xác định PACB tối ưu.

HD: Cộng 2 ràng buộc của bài toán rồi ước lượng $f(x) \ge 2p+1$.

ĐS. $x^* = (p, 0, p+1, 0)$.

8. Cho bài toán QHTT

$$f(x) = 6x_1 + px_2 + x_3 \Rightarrow \text{Min}$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \le p$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \ge 0$$

$x_j \le 0$ với $\forall j$ trong đó p là tham số

Hãy biện luận theo p về sự tồn tại PACB tối ưu của bài toán.

HD: $p \ge 0$ bài toán có PACB tối ưu; $p < 0$ bài toán không có PA.

9. Cho bài toán QHTT

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \Rightarrow \text{Min}$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = p$$
$$2x_2 + x_4 = 6$$

$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$ trong đó p là tham số

Không dùng thuật toán, chứng minh bài toán có PACB tối ưu với mọi $p \geq 0$.

HD: PA x = (p, 0, 0, 6); $f(x) \geq 2p$.

10. Giải các bài toán QHTT sau bằng phương pháp đơn hình

a.
$$f(x) = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \Rightarrow \text{Min}$$
$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 18$$
$$6x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_5 \geq 36$$
$$2x_1 + 3x_2 - 2x_5 \leq 14$$
$$x_j \leq 0 \text{ với } \forall j$$

ĐS. $x^* = (9/2, 0, 3, 0, 0)$ duy nhất; $f_{Min} = 12$.

b.
$$f(x) = x_2 + x_3 + 5x_4 + 4x_5 \Rightarrow \text{Min}$$
$$2x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 18$$
$$4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 6x_4 \geq 80$$
$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 4$$
$$x_j \geq 0 \text{ với } \forall j$$

ĐS. Bài toán không có PA.

c. $f(x) = 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 4x_5 \Rightarrow \text{Min}$

$x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \geq 18$

$x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 4x_5 = -40$

$2x_1 + x_2 - x_4 \leq 15$

$x_j \geq 0$ với $\forall j$

ĐS. f(x) không bị chặn.

d: $f(x) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 \Rightarrow \text{Max}$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 20$

$4x_2 + 2x_4 + x_5 = 10$

$-5x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 32$

$x_j \geq 0$ với $\forall j$

ĐS. Bài toán không có PA.

11. Cho bài toán QHTT

$f(x) = 4x_1 + 12x_2 - 16x_3 \Rightarrow \text{Min}$

$x_1 - 3x_2 \geq -6$

$x_1 + 3x_2 - 4x_3 \geq -2$

$x_2 - x_3 \leq 4$

a. Viết bài toán đối ngẫu và chỉ ra các cặp ràng buộc đối ngẫu.

b. Cho vectơ x = (-1, 1, 1). x có phải là phương án CB? PA tối ưu của bài toán gốc?

ĐS. b. x tối ưu nhưng không CB (dùng định lý đối ngẫu 2).

12. Cho bài toán QHTT

$$f(x) = 6x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \rightarrow \text{Min}$$
$$-x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \geq -16$$
$$7x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 0$$
$$3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 \leq 10$$
$$2x_1 + 2x_2 - 6x_4 \geq -2$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,...,4)$$

a. Chứng tỏ bài toán giải được và xác định 1 phương án cực biên tối ưu.

b. Xác định tập phương án tối ưu và các phương án cực biên tối ưu của bài toán đối ngẫu.

13. Cho bài toán QHTT

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + c_4x_4 \rightarrow \text{Max}$$
$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 5$$
$$-3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -3$$
$$x_1 + x_2 - x_4 \leq 6$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,...,4)$$

a. Với $c_1 = -1$, giải bài toán đã cho bằng phương án đơn hình. Xác định các phương án cực biên tối ưu của bài toán và 1 phương án tối ưu không cực biên có thành phần x_4 bằng 10.

b. Với giá trị nào của c_4 bài toán đã cho không giải được. Giải thích vì sao?

14. Cho bài toán

$$f(x) = -5x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 + 6x_5 - 7x_6 \Rightarrow \text{Min}$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 - 2x_6 \geq 4$$
$$-x_1 - x_2 - x_4 - x_5 + 3x_6 = -1$$
$$4x_1 + 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 - x_6 \leq -7$$
$$x_1, x_3, x_6 \geq 0;\ x_2, x_5 \leq 0$$

a. Viết bài toán đối ngẫu.

b. Nêu những tính chất có thể có của véc tơ $x^0 = (2\ 0\ 1\ 5\ 0\ 2)$ đối với bài toán đã cho. Xác định phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu và các tính chất của nó.

15. Cho bài toán

$$f(x) = 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \Rightarrow \text{Max}$$
$$4x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 34$$
$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 60$$
$$2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \leq 32$$
$$x_j \geq 0\ (j = 1, 2, 3, 4)$$

a. Giải bài toán bằng phương án đơn hình.

b. Từ kết quả tính toán xác định các phương án tối ưu nếu thêm ràng buộc: $f(x) \leq 18$.

c. Giải lại bài toán trên có thêm ràng buộc $f(x) \leq 18$ bằng thuật toán đơn hình, so sánh với kết quả câu b).

16. Cho bài toán QHTT

$$f(x) = x_1 + 4x_2 + px_3 \Rightarrow \text{Max}$$
$$3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 10$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

$x_j \geq 0$ với $\forall j$, trong đó p là tham số

a. Viết bài toán đối ngẫu và chỉ ra các cặp ràng buộc đối ngẫu.

b. Với điều kiện nào của p, thì vectơ x = (2, 1, 0) sẽ là phương án tối ưu của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu có PACB tối ưu không suy biến?

c. Với giá trị của p tìm được ở câu b, chứng tỏ rằng x là PACB tối ưu duy nhất.

ĐS. b. p < 4 (dùng định lý đối ngẫu 2).

c. Sử dụng PA tối ưu đối ngẫu và định lý đối ngẫu 2.

17. Cho bài toán

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \Rightarrow \text{Min}$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 20$$
$$x_2 - 2x_3 + 2x_4 \approx 16$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

a. Viết bài toán đối ngẫu và chỉ ra các cặp ràng buộc đối ngẫu.

b. Không giải, hãy chứng tỏ bài toán gốc giải được, hãy xác định phương án cực biên tối ưu.

c. Nếu $f(x) \Rightarrow \text{Max}$ thì ta có kết luận gì về f(x)?

HD. b. Chứng minh bài toán đối ngẫu có PA duy nhất (tối ưu); sử dụng định lý đối ngẫu 2.

c. f(x) không bị chặn trên vì bài toán đối ngẫu không có PA.

18. Cho bài toán

$$f(x) = 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \Rightarrow \text{Min}$$

$$2x_1 + 0{,}5x_2 + x_4 \geq b_1$$

$$x_1 + 2x_3 \geq b_2$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = b_3$$

$$x_1 \geq 0$$

a. Viết bài toán đối ngẫu và chỉ ra các cặp ràng buộc đối ngẫu.

b. Chứng minh bài toán có phương án tối ưu.

c. Không dùng thuật toán hãy chỉ ra tất cả các phương án tối ưu và một phương án cực biên tối ưu (nếu có) khi b = (12 2 6).

19. Cho bài toán QHTT

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \Rightarrow \text{Min}$$

$$2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq -1$$

$$x_j \leq 0 \text{ với } \forall j$$

a. Giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình.

b. Thay điều kiện $x_j \geq 0$ $\forall j$ bằng điều kiện $x_1 \geq 0$, $x_2 \leq 0$, hãy viết bài toán đối ngẫu của bài toán đã thay đổi và chỉ ra các cặp điều kiện đối ngẫu.

c. Chứng tỏ rằng bài toán đối ngẫu xác định ở câu b không có PA tối ưu.

d. Nếu f(x) $\Rightarrow$ Max thì kết luận của câu c còn đúng hay không? Vì sao?

ĐS. a. $x^* = (3/2, 0, 0)$ duy nhất.

c. Bài toán đối ngẫu không có PA vì có ràng buộc mẫu thuẫn.

d. Vẫn đúng vì bài toán đối ngẫu vẫn có ràng buộc mâu thuẫn.

20. Cho bài toán QHTT (I)

$$\begin{aligned} f(x) = \; & x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \Rightarrow \text{Min} \\ & 2x_1 \quad + x_3 - 5x_4 \le 7 \\ & 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ & x_j \ge 0 \text{ với } \forall j \end{aligned}$$

a. Giải bài toán (I) bằng phương pháp đơn hình.

b. Hãy viết bài toán đối ngẫu của bài toán (I) và chỉ ra các cặp điều kiện đối ngẫu.

c. Bài toán đối ngẫu có PACB hay không? Vì sao?

d. Nếu $f(x) \Rightarrow$ Max thì kết luận của câu c còn đúng hay không? Vì sao?

ĐS. a. f(x) không bị chặn.

c. Không, vì không có PA.

d. Vẫn đúng vì bài toán đối ngẫu có mâu thuẫn trong ràng buộc (cộng ràng buộc 3 với ràng buộc 4).

21. Cho bài toán QHTT

$$\begin{aligned} f(x) = px_1 - 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 \quad & \Rightarrow \text{Max} \\ x_1 \quad + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 6 \\ -2x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 32 \end{aligned}$$

$x_j \ge 0$ với $\forall j$, p là tham số

a. Tìm PACB của bài toán trên bằng phương pháp đơn hình.

b. Viết bài toán đối ngẫu, chỉ ra các cặp ràng buộc đối ngẫu.

c. Tìm điều kiện đối với p để y = (4, 0) là PA, PACB của bài toán đối ngẫu.

d. Trong trường hợp y là PA của bài toán đối ngẫu, y có phải là PA tối ưu? Vì sao?

ĐS. a. Bài toán không có phương án

c. $p \le 4$; $p = 4$.

d. Không, vì bài toán gốc không có PA.

22. Cho bài toán QHTT

$$f(x) = x_1 + px_2 + 2x_3 \rightrightarrows \text{Min}$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 \ge 4$$

$$x_1 - x_2 - x_3 \le 1$$

$x_j \ge 0$ với $\forall j$, p là tham số

a. Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình với p = 1.

b. Chứng minh rằng bài toán trên có PACB tối ưu với mọi $p > 0$.

c. Viết bài toán đối ngẫu, chỉ ra các cặp ràng buộc đối ngẫu.

d. Nếu $f(x) \Rightarrow \text{Max}$ và $p > 0$ thì bài toán đối ngẫu có phương án hay không? Vì sao?

ĐS. a. $x^* = (0, 0, 2)$ không duy nhất.

b. Sử dụng bảng đơn hình cuối của câu a, chứng tỏ x^* vẫn tối ưu.

d. Không; (sử dụng bảng đơn hình cuối của câu a. chứng tỏ f(x) không bị chặn).

23. Cho bài toán QHTT

$$f(x) = 2x_1 + x_2 + 4x_3 \Rightarrow \text{Min}$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 10$$
$$x_1 - x_3 + x_4 \le 12$$
$$x_j \ge 0 \text{ với } \forall j$$

a. Không giải, hãy chứng tỏ bài toán trên có PACB tối ưu là $x = (0, 0, 0, 0)$.

b. Bằng phương pháp đơn hình, hãy khẳng định lại điều kết luận ở câu a.

c. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán trên, chỉ ra các cặp ràng buộc đối ngẫu.

d. Chứng tỏ bài toán đối ngẫu có PACB tối ưu, xác định PA đó.

ĐS. d. $y^* = (0, 0)$.

24. Cho bài toán QHTT

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \Rightarrow \text{Min}$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 \ge 6$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 \ge -2$$
$$x_j \ge 0 \text{ với } \forall j$$

a. Tìm PACB của bài toán trên bằng phương pháp đơn hình.

b. Sử dụng PACB tìm được ở câu a, chứng tỏ nếu f(x)⇒ Max thì bài toán không giải được.

c. Thay điều kiện $x_j \geq 0$ $\forall j$ của bài toán ban đầu bằng điều kiện $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, hãy viết bài toán đối ngẫu của bài toán đã thay đổi, chỉ ra các cặp ràng buộc đối ngẫu.

d. Hãy chỉ ra một PA của bài toán đối ngẫu đã được xác định ở câu c, từ đó có kết luận gì về sự tồn tại PA tối ưu của bài toán này?

ĐS. a. $x^0 = (0, 0, 3)$.

b. f(x) không bị chặn trên.

d. $y^0 = (0, 2)$*; bài toán giải được.*

25. Cho bài toán QHTT

$$f(x) = x_1 - px_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 \Rightarrow \text{Min}$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 + 4x_5 \geq 12$$

$$-4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 75$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \leq 14$$

$x_j \geq 0$ với $\forall j$, p là tham số

a. Giải bài toán trên với p = 5.

b. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán trên và chỉ ra các cặp ràng buộc đối ngẫu.

c. Cho y = (0, 1, 0), xác định điều kiện đối với p để y là phương án? phương án CB của bài toán đối ngẫu.

d. Với điều kiện đối với p xác định trong câu c và nếu f(x) $\Rightarrow$ Max, bài toán gốc có PACB tối ưu hay không? Vì sao?

ĐS. a. Bài toán không có PA.

c. $p \geq -5$; $p = -5$.

d. Bài toán gốc không có PA với mọi p.

26. Cho bài toán QHTT sau:

$$f(x) = x_1 - x_2 + 2x_3 + px_4 + 3x_5 \Rightarrow \text{Min}$$

$$2x_1 \qquad -2x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 16$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 40$$

$$x_3 + 2x_4 - x_5 \leq 30$$

$$x_j \geq 0 \text{ với } \forall j$$

a. Giải bài toán với p = 2.

b. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán trên và chỉ ra các cặp ràng buộc đối ngẫu.

c. Cho y = (0, - 1, 0), xác định điều kiện đối với p để y là phương án? PACB của bài toán đối ngẫu.

d. Sử dụng bước cuối của câu a, chứng minh rằng nếu $p \geq -3$ thì bài toán đối ngẫu sẽ có phương án tối ưu.

ĐS. a. $x^* = (8, 32, 0, 0, 0)$ duy nhất.

c. $p \geq -1$; $p = -1$.

d. Căn cứ vào bảng đơn hình cuối cùng; x^* vẫn tối ưu.

27. Cho bài toán QHTT sau:

$$f(x) = px_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 \Rightarrow \text{Min}$$
$$x_1 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \geq 12$$
$$-2x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 36$$
$$x_2 + x_3 - x_5 \leq 25$$
$$x_j \geq 0 \text{ với } \forall j, \text{ p là tham số}$$

a. Giải bài toán với p = 3.

b. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán trên và chỉ ra các cặp ràng buộc đối ngẫu.

c. Sử dụng bước cuối của câu a, hãy chứng minh rằng nếu p < 0 thì bài toán gốc không có phương án tối ưu.

d. Hãy kiểm tra kết luận của câu c một cách trực tiếp trên bài toán đối ngẫu.

ĐS. a. f(x) không bị chặn.

c. Dấu hiệu bài toán không giải được trên cột x_1.

d. Bài toán đối ngẫu không có PA vì hệ ràng buộc mâu thuẫn.

28. Cho bài toán

$$f(x) = c_1x_1 - x_2 + x_3 \Rightarrow \text{Max}$$
$$2x_1 - x_2 + x_4 \geq -2$$
$$x_1 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 10$$
$$2x_2 + x_4 - x_5 \leq 12$$
$$x_j \geq 0 \text{ với } \forall j$$

a. Tìm c_1 sao cho bài toán có phương án tối ưu với x_1 và x_4 dương còn các thành phần khác bằng 0.

b. Chứng minh rằng với mọi giá trị c_1 bài toán không nhận vectơ sau là phương án tối ưu: X = (0 0 0 0 10)

29. Cho bài toán

$$f(x) = 8x_1 - 6x_2 - 4x_3 \Rightarrow Max$$
$$x_1 \leq 1$$
$$x_3 \leq 3,5$$
$$-3/4x_1 + 3/4\,x_2 + 1/2x_3 \leq 1$$
$$-1/2x_1 + 1/2\,x_2 + x_3 \leq 3$$
$$x_2 \leq -2$$
$$2x_1 - 2x_2 - x_3 \leq 3,5$$

a. Vectơ x = (1 -2 5/2) có phải là phương án tối ưu của bài toán không? Có nhận xét gì về phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

b. Giải bài toán đối ngẫu của bài toán trên bằng thuật toán đơn hình.

30. Cho bài toán

$$f(x) = -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 5x_5 \Rightarrow Min$$
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 30$$
$$x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 23$$
$$3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 \geq -10$$
$$x_j \geq 0\ (j = 1...5)$$

a. Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình. Xác định tập phương án tối ưu.

b. Viết bài toán đối ngẫu, phân tích các tính chất của vectơ y = (-3 5 0) đối với bài toán này.

Chương IV
MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

ĐẶT VẤN ĐỀ

Lớp mô hình hệ thống phục vụ cộng cộng hay còn gọi là mô hình hệ thống xếp hàng, phục vụ đám đông là một trong những lớp mô hình toán hình thành từ các bài toán thực tế. Lớp mô hình này xuất phát từ bài toán tổ chức các hệ thống phục vụ như bản thân tên gọi của nó. Trong những hệ thống như vậy người ta thấy có rất nhiều yếu tố tác động, chi phối đến cách thức hoạt động cũng như kết quả hoạt động của hệ thống. Nếu xem xét một hệ phục vụ dưới giác độ mô hình hoá thì các mô hình tương ứng đôi khi không cho phép chúng ta xác định các yếu tố ngoại sinh và nội sinh ngay từ đầu. Việc hình thành bài toán đối với lớp mô hình này cũng có những yếu tố đặc biệt. Thông thường với các mô hình của kinh tế vi mô hay vĩ mô đã biết, cùng với bài toán là hình ảnh một mô hình rất rõ nét. Với các mô hình thực tế nói chung và mô hình phục vụ công cộng nói riêng hệ thống chỉ tiêu đánh giá khả năng tồn tại ở những trạng thái khác nhau của hệ thống sẽ đóng vai trò các biến nội sinh. Chúng sẽ là cơ sở đánh giá hiệu quả và chất lượng phục vụ của hệ thống. Các yếu tố ngoại sinh trong những tình huống khác nhau có thể được lựa chọn từ các tham số.

Với mô hình hệ thống phục vụ công cộng, chúng ta sẽ

thấy rõ hơn một trong các phương thức xây dựng, phân tích mô hình mà cơ sở toán học đã được thiết lập ở chương I. Ngoài ra chúng ta tiếp cận với một lớp đơn giản các mô hình ngẫu nhiên, chúng đòi hỏi những thủ thuật riêng trong xây dựng và phân tích mô hình.

I. BÀI TOÁN LÝ THUYẾT PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

Trong các hoạt động kinh tế xã hội, chúng ta thường gặp những quá trình phục vụ, trong đó người ta quan tâm đến hiệu quả hoạt động của cơ sở phục vụ về cả hai mặt: lợi ích của cơ sở phục vụ và lợi ích của đối tượng được phục vụ. Một trong những đặc điểm quan trọng của các quá trình này là đối tượng có tính chất **đám đông** và **ngẫu nhiên,** thời gian thoả mãn yêu cầu của đối tượng cũng có tính chất **ngẫu nhiên.** Điều đó không cho phép chúng ta tổ chức, quản lý hệ thống phục vụ như một quá trình thường xuyên, đều đặn. Bài toán lý thuyết phục vụ công cộng nghiên cứu các hệ thống phục vụ trong điều kiện tác động của các yếu tố ngẫu nhiên và đưa ra các phân tích, đánh giá hiệu quả phục vụ của chúng. Thông qua việc nghiên cứu các mô hình hệ thống phục vụ công cộng cũng cho chúng ta cách nhìn một hệ thống ngẫu nhiên trong trường hợp đơn giản, sự khác biệt của nó với các hệ thống trong đó mọi quá trình diễn ra đều đặn; đồng thời chúng ta cũng tiếp cận với một trong những cách mô hình hoá các hiện tượng kinh tế - xã hội đó là mô hình hoá bằng sơ đồ trạng thái. Chúng ta sẽ thấy sự không ăn khớp của các quá trình tưởng như đã được thiết kế đồng bộ. Chẳng hạn nếu thời gian sản xuất một loại sản phẩm là ngẫu nhiên với cường độ trung bình k sản phẩm/phút, bộ phận

kiểm tra cũng có cường độ tương đương có cùng phân phối xác suất thì không phải vì thế mà mọi việc diễn ra một cách bình thường theo nghĩa là mọi sản phẩm đều được kiểm tra tức thì sau sản xuất. Các mô hình này có nhiều ứng dụng trong thực tế, từ đơn giản đến phức tạp. Trong khuôn khổ cho phép, chúng ta chỉ nghiên cứu một vài dạng cơ bản, tuy nhiên phương pháp nghiên cứu có thể sử dụng cho các hệ thống phức tạp hơn nhiều. Sau đây là một vài thí dụ dẫn đến các bài toán phục vụ công cộng đơn giản.

Thí dụ 4.1: Xét một bến cảng có 4 cầu tàu, ta gọi A là sự kiện có tàu cần vào cảng bốc hàng. Trong đo số các trường hợp, A là biến cố ngẫu nhiên, mỗi tàu cần một thời gian bốc hàng T tại một cầu tàu và T cũng là một biến ngẫu nhiên. Như vậy không thể tính toán lưu lượng tàu vào cảng một cách thông thường, phù hợp theo một nghĩa nào đó. Chỉ có thể tính khả năng và các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của cảng một cách trung bình. Bài toán dẫn tới việc thiết kế bao nhiêu cầu tàu để có thể đảm bảo khả năng hàng thông qua cảng với những hạn chế về mặt hiệu quả sử dụng các cầu tàu cũng như các yêu cầu khác có liên quan.

Thí dụ 4. 2: Trên một tuyến đường có một trạm thu phí giao thông, dòng xe chạy trên tuyến này có tính chất ngẫu nhiên; nói cách khác số xe qua trạm trong mỗi đơn vị thời gian là một biến ngẫu nhiên và rõ ràng là thời gian trả tiền của mỗi xe khi qua trạm cũng là ngẫu nhiên. Hai vấn đề tối thiểu được đặt ra là: mức độ thông tuyến và tận dụng công suất của trạm. Bài toán đặt ra là xác định một cấu trúc của trạm hợp lý theo một chỉ tiêu nào đó.

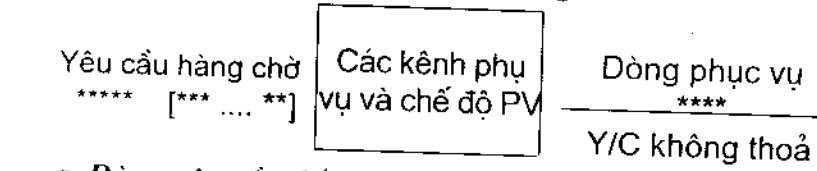
II. MÔ HÌNH HOÁ HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

Với những bài toán phân tích hệ thống có thể qui về hệ phục vụ công cộng. Có thể mô tả những nội dung cơ bản nhất của quá trình mô hình hoá các hệ thống này như sau:

1. Hệ thống phục vụ công cộng và các yếu tố cấu thành

Sau đây ta nghiên cứu sơ bộ về cấu trúc của một hệ thống phục vụ công cộng với các yếu tố cơ bản của nó.

Có thể mô tả một cách sơ bộ hệ thống như sau:



a. Dòng yêu cầu đến hệ thống (dòng yêu cầu)

Dòng các đối tượng hướng đến hệ thống nhằm thoả mãn một loại nhu cầu mà hệ thống phục vụ có khả năng đáp ứng.

Đặc trưng quan trọng của dòng yêu cầu là qui luật về sự xuất hiện các yêu cầu theo thời gian. Một trong những dòng yêu cầu phổ biến là dòng tuân theo qui luật Poát xông (Poisson) và đặc biệt là dòng tuân theo qui luật Poát xông dừng. Để có thể nhận biết một dòng yêu cầu có phân phối Poát xông người ta có thể căn cứ vào các tính chất của nó, đó là:

1. Tính đơn nhất: Một dòng yêu cầu có tính **đơn nhất** nếu trong một khoảng thời gian đủ nhỏ hầu như chắc chắn là không có quá 1 yêu cầu xuất hiện. Như vậy nếu ta kí hiệu $P_k(t,\Delta t)$ là xác suất trong thời gian từ t đến $t+\Delta t$ có k yêu cầu xuất hiện thì:

$$P_0(t, \Delta t) + P_1(t, \Delta t) = 1 - O(\Delta t)$$

($O(\Delta t)$ là một vô cùng bé của Δt).

2. Tính không hậu quả: Một dòng yêu cầu có tính **không hậu quả** nếu xác suất xuất hiện x yêu cầu trong khoảng thời gian t đến t + Δt không phụ thuộc vào việc trước thời điểm t đã có bao nhiêu yêu cầu xuất hiện. Như vậy biến cố có x yêu cầu xuất hiện trong khoảng thời gian t đến t + Δt và biến cố có x yêu cầu xuất hiện trong khoảng thời gian t đến t + Δt khi trước đó đã có k yêu cầu xuất hiện độc lập với nhau với mọi k, tức là:

$P_x(t, \Delta t) = P_x(t, \Delta t/k$ yêu cầu đã xuất hiện) với mọi k.

Dòng yêu cầu như vậy có xác suất xuất hiện x yêu cầu trong khoảng thời gian t đến t + Δt được tính theo công thức Poát xông như sau:

$$P_x(r, \Delta t) = \frac{a(t, \Delta t)^x e^{-a(t, \Delta t)}}{x!} \quad x \geq 0$$

trong đó a(t,Δt) là số trung bình yêu cầu xuất hiện từ t đến t+Δt.

3. Tính dừng: Dòng yêu cầu có tính dừng nếu như xác suất xuất hiện x yêu cầu trong khoảng thời gian Δt không phụ thuộc vào điểm đặt của khoảng thời gian đó. Tức là: $P_x(t, \Delta t) = P_x(\Delta t)$ với mọi t.

Nói cách khác mật độ dòng yêu cầu không đổi: $a(\Delta t) = \lambda \Delta t$ và ta có:

$P_x(\Delta t) = \frac{(\lambda \Delta t)^x e^{-\lambda \Delta t}}{x!}$, trong đó: λ là số yêu cầu trung bình xuất hiện trong một đơn vị thời gian.

Nếu chọn $\Delta t = 1$, ta có công thức của qui luật Poát xông quen thuộc.

b. Kênh phục vụ

Tập hợp một số điều kiện vật chất, con người, thông tin,... có chức năng thoả mãn một loại yêu cầu nào đó gọi là kênh phục vụ.

Đặc trưng của kênh phục vụ là thời gian phục vụ một yêu cầu. Thời gian phục vụ một yêu cầu cũng là một biến ngẫu nhiên, tuân theo một qui luật phân phối xác suất nào đó. Một trong những qui luật phổ biến là qui luật chỉ số (hay phân phối mũ), với hàm luật độ: $f(t) = \mu e^{-\mu t}$. Đó cũng chính là qui luật phân phối của thời gian giữa hai lần xuất hiện liên tiếp của các yêu cầu đối với dòng yêu cầu Poát xông dừng [1].

c. Dòng phục vụ

Là dòng các đối tượng đã được phục vụ đi ra khỏi hệ thống. Qui luật phân phối xác suất của dòng phục vụ tuỳ thuộc qui luật phân phối của thời gian phục vụ của các kênh. Nếu thời gian phục vụ tuân theo qui luật chỉ số thì dòng phục vụ là dòng Poát xông dừng và ngược lại.

---

[1] Thấy vậy, nếu gọi T là thời gian xuất hiện một yêu cầu kể từ $t^* = 0$ thì xác suất $T < t$ có thể tính theo công thức $P(T< t) = 1 - P^0(t^*, t - t^*)$. Với dòng yêu cầu phân phối Poission ta có:

$$P^{(0)}(t^*, t - t^*) = \frac{[a(t)]^0 e^{-a(t)}}{0!} = e^{-a(t)}$$

Vậy: $F(T) = P(T < t) = 1 - e^{-a(t)}$.

Đây chính là hàm phân phối xác suất của qui luật mũ.

d. Hàng chờ

Đối với một hệ thống, tuỳ thuộc chế độ tiếp nhận yêu cầu và tính chất của các yêu cầu, có thể xuất hiện hàng chờ trước các kênh phục vụ, đó là *dòng các yêu cầu đến hệ thống nhưng chưa được phục vụ ngay, phải xếp hàng chờ theo một nguyên tắc nào đó,* ở đây ta chỉ xét hàng chờ đơn giản, không có một sự phân biệt, ưu tiên nào.

e. Dòng các yêu cầu không được phục vụ

Đây là *bộ phận yêu cầu đến hệ thống nhưng không được nhận phục vụ vì một lí do nào đó.*

f. Chế độ phục vụ

Chế độ phục vụ xác định cách thức làm việc của các kênh và cách thức tiếp nhận các yêu cầu.

Có thể phân chia chế độ phục vụ theo một số cách thức khác nhau, thông thường người ta chia các hệ thống thành các hệ thống không chờ (từ chối) và có chờ; hệ thống phục vụ song song độc lập hay hợp tác, hệ thống đơn hay hệ thống nối tiếp.

2. Phân loại hệ thống

Theo các tiêu thức khác nhau, hệ thống phục vụ công cộng có thể phân loại như sau:

Hệ dừng và không dừng: Thực tế các hệ tồn tại ở trạng thái dừng hay dừng theo chu kỳ. Với các hệ thống dừng, các phân tích tập trung chủ yếu vào tính chất hội tụ đến hệ dừng và thời gian hệ được xem là dừng có tính thống kê.

Hệ chờ và không chờ (từ chối): Với các hệ chờ, người ta

có thể chia thành các hệ chờ với các ràng buộc về thời gian, chỗ chờ hay số yêu cầu tối đa có trong hệ thống.

Trong giới hạn cho phép về thời lượng và cơ sở toán học, chúng ta chỉ xem xét một hệ thống Poát xông dừng.

3. Trạng thái hệ thống, quá trình chuyển trạng thái

a.Phương pháp phân tích

Khi nghiên cứu một hệ thống phục vụ công cộng, người ta có thể dùng các cách tiếp cận khác nhau, ở đây ta sử dụng phương pháp phân tích,,nội dung cụ thể là:

- Thu nhập số liệu về các dòng biến cố liên quan đến hệ thống: Dòng yêu cầu, dòng phục vụ hoặc thời gian phục vụ của các kênh.

- Xác định qui luật dòng yêu cầu và dòng phục vụ; xác định chế độ phục vụ.

- Xác định trạng thái hệ thống, sơ đồ trạng thái và lập hệ phương trình trạng thái.

- Giải hệ phương trình trạng thái; tính các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của hệ thống.

- Cải tiến hệ thống theo một chỉ tiêu hiệu quả nào đó.

Việc xác định qui luật các dòng yêu cầu và dòng phục vụ; lập sơ đồ trạng thái là hai nội dung quan trọng hơn cả. Sau đây ta sẽ đề cập kỹ hơn về hai nội dung đó.

b. Tiêu chuẩn χ^2 (khi bình phương) và việc kiểm tra giả thiết phân phối xác suất của dòng biến cố

Kiểm định giả thiết về một dạng phân phối đã được trình bày trong các giáo trình xác suất thống kê. Người ta có thể sử

dụng một số kiểm định khác nhau (kiểm định khi bình phương, kiểm định Kolmogorov - Simirnov...) Kiểm định Khi bình phương là một trong những kiểm định thông dụng nhất và dễ dàng nhất với các số liệu quan sát. Sau đây ta xem xét cụ thể kiểm định này đối với các dòng biến cố của hệ thống phục vụ công cộng.

Để kiểm định giả thiết dòng yêu cầu phân phối Poát xông ta thực hiện:

- Chia thời gian thành các đơn vị nhỏ và tiến hành quan sát sự xuất hiện các yêu cầu trong các khoản thời gian đó. Ta nhận được bộ số liệu bao gồm số yêu cầu xuất hiện trong một đơn vị thời gian: x_i và số khoảng thời gian tương ứng: n_i. Để đảm bảo tính đại diện của các giá trị quan sát không quá nhỏ đối với mỗi giá trị, thông thường nếu các khoảng thời gian có số yêu cầu tương ứng nhỏ hơn 5 ta ghép các khoảng đó để có $n_i \geq 5$, giá trị đại diện là giá trị trung bình.

- Tính giá trị thống kê

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i' - n_i)^2}{n_i'^2}$$

Trong đó: n_i' là giá trị tần số lý thuyết nhận được từ phân phối Poát xông với trung bình là $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i x_i}{n}$, k là số nhóm giá trị x_i, n_i là tần số quan sát; n là tổng số quan sát.

Thí dụ: Khi quan sát số khách hàng đến một cửa hàng, người ta thu được số liệu sau:

Số khách	0	1	2	3	4	7
Số khoảng thời gian	21	23	10	4	1	1

Để kiểm tra giả thiết: "Số khác đến cửa hàng có phân phối Poát xông", ta tiến hành các thủ tục sau:

- Tính giá trị quan sát $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i x_i}{n} = 1{,}1$; k là số nhóm giá trị x_i, n_i là tần số quan sát; n là tổng số quan sát.

- Dùng giá trị này ước lượng giá trị trung bình của phân phối, từ đó tra bảng Poát xông $P(\lambda)$ với các giá trị có tần số thấp đã được ghép lại, thoả mãn điều kiện $n_i \geq 5$.

- Chọn một mức ý nghĩa α; nếu giá trị thống kê $\chi^2 < \chi^2(\alpha, m)$; trong đó $m = k - 2$ thì giả thiết dòng yêu cầu phân phối Poát xông không bị bác bỏ.

Lập bảng tính toán như sau:

Số y/c x_i	Số khoảng thời gian n_i	Px_i	n'_i	$\frac{(n'_i - n_i)^2}{n_i^2}$
0	21	2,33287	19,9722	0,002648
1	23	0,36616	21,9696	0,00219972
2	10	0,20139	12,0834	0,029728
3	4	0,07384		
4	1	0,02031		
5	0	0,00447	5,9742	0,00002
6	0	0,00082		
7	1	0,00013		
	n=60			0,03459

Với các quan sát trên có $\lambda = 1{,}1$, ta có giá trị quan sát của thống kê Khi bình phương là: 0,03459, giá trị lý thuyết (tra bảng) là: $\chi^2(0{,}05; 4) = 11{,}0705$.

Vậy giả thiết dòng yêu cầu phân phối Poát xông không bị bác bỏ. Hay có thể xem là dòng khách đến cửa hàng phân phối Poát xông với trung bình $\lambda = 1,1$.

c. Trạng thai hệ thống và quá trình chuyển trạng thái

+ Trạng thái hệ thống

Ta gọi tập hợp một hay một số đặc trưng mà trên cơ sở đó có thể *phân biệt sự tồn tại của hệ thống trong những tình trạng khác nhau tại mỗi thời điểm là trạng thái của hệ thống.*

Nếu kí hiệu A(t) là một trạng thái của hệ thống thì A(t) là một biến cố ngẫu nhiên. Để có thể phân tích hệ thống phục vụ công cộng, cần xác định tất cả các trạng thái có thể có của hệ thống, tập hợp các trạng thái tại một thời điểm t bất kỳ là một *nhóm đầy đủ các biến cố.*

Với những hệ thống phục vụ công cộng Poát xông, từ đây về sau ta sẽ ký hiệu các trạng thái của chúng là $X_k(t)$, để chỉ hệ thống ở trạng thái X_k tại thời điểm t.

+ Xác suất trạng thái

Việc hệ thống tồn tại ở một trạng thái cụ thể là một biến cố ngẫu nhiên nêu *tương ứng với mỗi trạng thái có một giá trị xác suất gọi là xác suất trạng thái,* để chỉ ra khả năng hệ thống ở trạng thái tương ứng. Ta kí hiệu xác suất hệ thống ở trạng thái X_k tại thời điểm t là $P_k(t)$.

+ Quá trình chuyển trạng thái

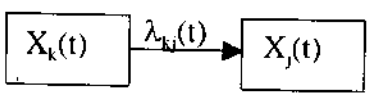
Tại mỗi thời điểm t hệ thống tồn tại ở một trạng thái nhất định. Chẳng hạn $X_k(t)$, sau một thời gian Δt hệ thống có thể

chuyển đến một trạng thái khác $X_j(t+\Delta t)$ nhờ sự tác động của các yếu tố ngẫu nhiên nào đó. Ta gọi xác suất hệ thống chuyển từ $X_k(t)$ đến $X_j(t+\Delta t)$ là xác suất chuyển trạng thái Trong các mô hình sẽ đề cập sau này ta quan tâm đến sự tác động chuyển trạng thái, thay vì xác suất chuyển trạng thái. Ta kí hiệu *cường độc của dòng biến cố làm cho hệ thống chuyển từ* $X_k(t)$ *đến* $X_j(t+\Delta t)$ *là* $\lambda_{kj}(t)$.

4. Sơ đồ trạng thái và hệ phương trình trạng thái

a. Sơ đồ trạng thái

Người ta dùng một sơ đồ mô tả toàn bộ các trạng thái và quá trình chuyển trạng thái của hệ thống. Trong đó mỗi trạng thái được thể hiện bởi một ô vuông với tên trạng thái, chẳng hạn: $\boxed{X_k(t)}$ Để chỉ sự chuyển trạng thái người ta dùng một mũi tên trên đó ghi cường độ của dòng biến cố làm hệ thống chuyển trạng thái theo chiều mũi tên, chẳng hạn:



b. Hệ phương trình trạng thái

Để phân tích một hệ thống phục vụ công cộng cần xác định các trạng thái có thể có và các xác suất trạng thái tương ứng. Theo thời gian, do các tác động của các yếu tố đến quá trình vận động của hệ thống đều có tính ngẫu nhiên, nên việc hệ thống chuyển từ trạng thái này sang trạng thái khác cũng có tính ngẫu nhiên. Để mô tả mối liên hệ về khả năng chuyển trạng thái như vậy, người ta sử dụng hệ phương trình trạng thái, trong đó các xác suất trạng thái và đạo hàm theo

thời gian của nó là các biến còn các tác động làm chuyển trạng thái là các hệ số. Hệ phương trình này cho phép xác định các xác suất trạng thái, làm cơ sở phân tích hệ thống. Nhờ sơ đồ chuyển trạng thái có thể thiết lập hệ phương trình trạng thái theo qui tắc sau:

Qui tắc viết hệ phương trình trạng thái

*Đạo hàm bậc nhất theo thời gian của xác suất trạng thái $P_k(t)$ bằng **tổng của một số số hạng**, số số hạng đó đúng **bằng số mũi tên** nối trạng thái đó với các trạng thái khác. Mỗi số hạng là tích của **xác suất trạng thái** mà mũi tên xuất phát và **cường độ dòng biến cố** ghi theo chiều mũi tên đó. Dấu của số hạng là dấu "-" nếu mũi tên xuất phát từ $X_k(t)$; là dấu "+" nếu mũi tên hướng đến $X_k(t)$.* Tức là:

$$\frac{dX_k(t)}{dt} = \sum_j \lambda_{jk}(t)P_j(t) - \sum_j \lambda_{kj}(t)P_k(t)^{(1)}$$

với điều kiện chuẩn là: $\sum_{\forall k} P_k(t) = 1$.

Điều kiện chuẩn thể hiện tập hợp $X_k(t)$ là một nhóm đầy đủ

---

(1)Có thể chứng minh công thức này như sau: Tại bất kỳ với một số gia Δt, ta có: $p_k(t+\Delta t) = \sum_j P_k(t)(1 - \lambda_{kj}(t)\Delta t) + \sum_j P_j(t)\lambda_{jk}(t)\Delta t$

$$= P_k(t) - \sum_j P_k(t)\lambda_{kj}(t)\Delta t + \sum_j P_j(t)\lambda_{jk}(t)\Delta t$$

Suy ra: $\frac{P_k(t+\Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = -\sum_j P_k(t)\lambda_{kj}(t) + \sum_j P_j(t)\lambda_{jk}(t)$

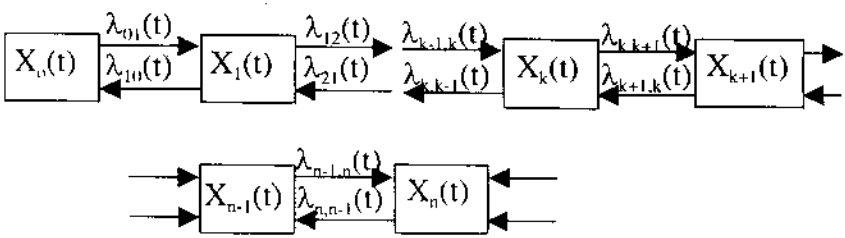
Lấy giới hạn khi $\Delta t \to 0$ ta có kết quả trên.

ở một và chỉ một trạng thái nói trên. Đây là một hệ phương trình vi phân cấp một. Tuy nhiên với hệ thống mà các dòng biến cố tác động đến hệ thống đều là dòng dừng (hệ thống dừng), thì hệ thống trở thành phương trình đại số tuyến tính thuần nhất và việc giải hệ trở nên đơn giản.

c. Quá trình huỷ và sinh - Nghiệm hệ phương trình trạng thái

+ Sơ đồ trạng thái

Trong các hệ thống phục vụ công cộng sẽ xét sau đây, ta gặp các sơ đồ chuyển trạng thái có dạng sau:



Trong đó mỗi trạng thái chỉ có thể chuyển qua lại với các trạng thái kề nó (trừ trạng thái đầu tiên và cuối cùng nếu có).

Ta gọi các quá trình như vậy là **quá trình huỷ và sinh.** Quá trình này cho phép thiết lập và giải hệ phương trình trạng thái khá đơn giản.

+ Hệ phương trình trạng thái

Với sơ đồ chuyển trạng thái như trên, áp dụng qui tắc viết hệ phương trình trạng thái hệ thống, ta có hệ phương trình trạng thái:

$P'_0(t) = - \lambda_{01}(t)P_0(t) + \lambda_{10}(t)P_1(t)$

$P'_1(t) = -\lambda_{10}(t)P_1(t) - \lambda_{12}(t)P_1(t) + \lambda_{01}(t)P_0(t) + \lambda_{21}(t)P_2(t)$

.....

$P'_k(t) = -\lambda_{k,k-1}(t)P_k(t) -\lambda_{k,k+1}(t)P_k(t) + \lambda_{k-1,k}(t)P_{k-1}(t) + \lambda_{k+1,k}(t)P_{k+1}(t)$

.....

với điều kiện chuẩn là: $\sum_{\forall k} P_k(t) = 1.$

Trong trường hợp hệ dừng, các đạo hàm theo thời gian đều bằng 0, ta có hệ phương trình sau:

$$0 = - \lambda_{01}P_0 + \lambda_{10}P_1$$

$$0 = - \lambda_{10}P_1 - \lambda_{12}P_1 + \lambda_{01}P_0 + \lambda_{21}P_2$$

..... (1)

$$0 = - \lambda_{k,k-1}P_k - \lambda_{k,k+1}P_k + \lambda_{k-1,k}P_{k-1} + \lambda_{k+1,k}P_{k+1}$$

.....

$$0 = - \lambda_{k,k-1}P_k - \lambda_{k,k+1}P_k + \lambda_{k-1,k}P_{k-1} + \lambda_{k+1,k}P_{k+1}$$

.....

với điều kiện chuẩn là: $\sum_{\forall k} P_k(t) = 1.$

+ Lời giải hệ (1)

Hệ (1) có thể giải nhờ cách thế dần các xác suất theo P_0. Tuy nhiên, đơn giản hơn nếu đặt: $U_i = - \lambda_{i,i+1}P_i + \lambda_{i+1,i}.P_{i+1}$.
thì hệ (1) trở thành:

$$U_0 = 0$$

$$U_i - U_{i-1} = 0 \ (i = 1, 2...)$$

Nghiệm của hệ là $U_i \equiv 0$.

Từ đó ta có thể đưa ra công thức tính các xác suất P_k theo P_0 như sau:

$$P_1 = (\lambda_{01}/\lambda_{10})P_0$$

$$P_{k-1} = (\lambda_{k,k-1}/\lambda_{k-1,k})P_k$$

Hay $$P_{k+1} = \prod_{i=0}^{k} \frac{\lambda_{i,i-1}}{\lambda_{i-1,i}} P_0.$$

Công thức này sẽ được sử dụng làm giảm nhẹ việc giải hệ phương trình trạng thái của các hệ thống phục vụ công cộng trình bày trong chương này.

Trong đó: $\lambda_{k,k+1} = \lambda$ và $\lambda_{k+1,k} = (k + 1)\mu$

Nếu đặt $\alpha = \lambda/\mu$, thì: $P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0$ (2)

III. MỘT SỐ HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

Trong khuôn khổ của giáo trình này, chúng ta sẽ nghiên cứu một số hệ thống phục vụ công cộng đơn giản. Mục đích chủ yếu của phần này là giới thiệu cách tiếp cận hệ thống và một vài cách thức phân tích hệ thống, là cơ sở để nghiên cứu các hệ thống phức tạp, gần gũi với các hệ thống phục vụ công cộng trong thực tế hơn. Chính vì vậy, các hệ thống được nghiên cứu dưới đây phải chấp nhận một số giả thiết mà theo truyền thống các hệ thống này có thể thoả mãn. Mặc dù có sự hạn chế nhất định, các ứng dụng của các mô hình này cũng rất hiệu quả trong thực tế.

1. Hệ thống phục vụ công cộng từ chối cổ điển (Hệ thống Eclang)

Một trong những hệ thống phục vụ công cộng đơn giản nhất được mô hình hoá đầu tiên là **hệ thống từ chối cổ điển.**

Hệ thống này mang tên người đề xuất bài toán tương ứng: **Hệ thống Eclang,** nó bắt đầu từ bài toán phân tích một trạm điện thoại thông thường, với một vài giả thiết đơn giản. Nhưng cũng chính từ bài toán này, từ hệ thống này người ta đã vận dụng phân tích những hệ thống rất lớn, chẳng hạn hệ thống phòng thủ, hệ thống kiểm dịch, hệ thống sản tin.... Sau đây ta chỉ nghiên cứu hệ thống Eclang đơn giản nhất.

a. Mô tả hệ thống

Hệ thống phục vụ công cộng có n kênh phục vụ, năng suất các kênh bằng nhau và bằng μ, dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng Poát xòng dừng, mật độ λ. Thời gian phục vụ một yêu cầu của kênh tuân theo qui luật mũ. Một yêu cầu đến hệ thống gặp lúc có ít nhất 1 kênh rỗi thì được nhận phục vụ cho đến thoả mãn tại một trong các kênh rỗi đó. Ngược lại nếu tất cả các kênh đều bận thì phải ra khỏi hệ thống. Cần xác định các chỉ tiêu phân tích hệ thống.

b. Quá trình thay đổi trạng thái và sơ đồ trạng thái của hệ thống

+ Trạng thái

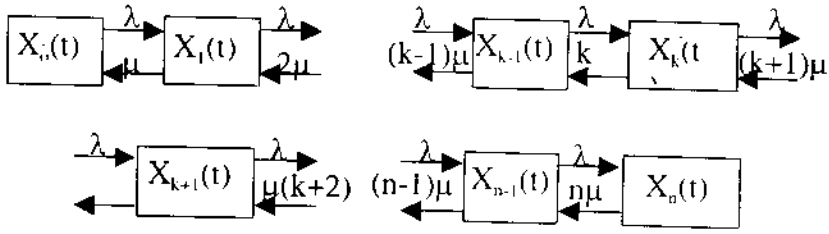
Ta quan tâm đến hiệu quả phục vụ của hệ thống, vì vậy đặc trưng được chọn để xác định trạng thái là số kênh bận tại mỗi thời điểm.

Gọi $X_k(t)$ *là trạng thái hệ thống có k kênh bận tại thời điểm* t ($k = 0, 1, 2, ..., n$).

Chú ý rằng với chế độ phục vụ của hệ thống Eclang, số

kênh bận cũng chính là số yêu cầu đang được phục vụ tại thời điểm t.

+ Sơ đồ chuyển trạng thái



Sơ đồ trên thiết lập trên cơ sở phân tích tính chất của các dòng Poát xông dừng như sau:

- *Nhờ tính đơn nhất* của dòng yêu cầu mà khi hệ thống ở trạng thái $X_k(t)$ nó chỉ có thể chuyển đến trạng thái $X_{k+1}(t)$ không thể chuyển thẳng đến các trạng thái $X_{k+i}(t)$ với $i > 1$. Cũng tương tự do tính đơn nhất của dòng phục vụ của các kênh hệ thống chỉ có thể chuyển đến $X_{k-1}(t)$ mà không thể chuyển thẳng đến các trạng thái $X_{k-i(t)}$ với $i > 1$.

- *Nhờ tính không hậu quả* của các dòng biến cố nêu trên mà cường độ các dòng biến cố không phụ thuộc vào trạng thái của hệ thống khi nó tác động đến.

- *Với tính chất dừng* ta có mật độ dòng yêu cầu không đổi, cũng như vậy mật độ dòng phục vụ chỉ phụ thuộc vào số kênh đang phục vụ.

Những phân tích như trên cũng ứng dụng cho việc xác lập sơ đồ chuyển trạng thái của các hệ thống tương tự.

c. Hệ phương trình trạng thái và các xác suất trạng thái

$$
\begin{aligned}
0 &= -\lambda P_0 + \mu P_1 \\
0 &= -\lambda P_1 - \mu P_1 + \lambda P_0 + 2\mu P_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= -\lambda P_k - k\mu P_k + \lambda P_{k-1} + (k+1)\mu P_{k+1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= -n\mu P_n + \lambda P_{n-1}
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

với điều kiện chuẩn là: $\sum_{k=0}^{n} P_k = 1$.

Đặt $\alpha=\lambda/\mu$ từ (2) ta có: $P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0$.

Thay vào điều kiện chuẩn ta có:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} P_0 = 1$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}}$$

Bằng cách nhân cả tử số và mẫu số trong công thức trên với $e^{-\alpha}$ ta có: $P_0 = \frac{e^{-\alpha}\alpha^0 / 0!}{\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k!}}$

Ký hiệu: $P(\alpha,k) = e^{-\alpha}\alpha^k/k!$ là xác suất 1 biến ngẫu nhiên phân phối Poát xông nhận giá trị k.

$R(\alpha,k) = \sum_{i=0}^{k} P(\alpha,i)$ là xác suất tích luỹ tương ứng ta có:

$$P_0 = \frac{e^{-\alpha}\alpha^0/0!}{\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k!}} = \frac{P(\alpha,0)}{R(\alpha,n)}$$

từ đó: $P_k = \frac{\alpha^k}{k!}P_0 = \frac{P(\alpha,k)}{R(\alpha,n)}$ (4)

Các giá trị xác suất nói trên có thể tính dễ dàng khi các tham số hữu tỷ và n đủ nhỏ. Trong trường hợp tổng quát ta có thể sử dụng bảng giá trị phân phối Poát xông (Bảng: *Giá trị phân phối Poisson).*

d. Các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của hệ thống

Đối với hệ thống này các chỉ tiêu cơ bản đánh giá hệ thống là:

1. Xác suất hệ thống có n kênh rỗi: P_r

$$P_r = P_0 = \frac{\alpha^0}{0!}P_0 = \frac{P(\alpha,0)}{R(\alpha,n)}.$$

Chỉ tiêu này cho biết tỷ lệ thời gian hệ thống rỗi hoàn toàn, thời gian rỗi hoàn toàn tồn tại ở mọi hệ thống Poát xông nói riêng và các hệ ngẫu nhiên nói chung, dù ta có giảm đến tối thiểu số kênh phục vụ hay tăng tối đa cường độ dòng yêu cầu.

2. Xác suất hệ thống có n kênh bận (hay xác suất một yêu cầu đến hệ thống bị từ chối P_{tc}): $P_n = \frac{\alpha^n}{n!}P_0 = \frac{P(\alpha,0)}{R(\alpha,n)}$.

đây cũng là hiệu suất lý thuyết tối đa của hệ thống, như vậy trong trường hợp hệ ngẫu nhiên không có khả năng thiết kế một hệ thống khai thác toàn bộ công suất kỹ thuật của các kênh.

3. Xác suất phục vụ (xác suất 1 yêu cầu đến hệ thống được nhận phục vụ) là : $P_{pv} = 1 - P_{tc} = 1 - P_n$.

Đó cũng là tỷ lệ các đối tượng được hệ thống tiếp nhận và phục vụ, đối với hệ thống phục vụ công cộng, đây là một trong số ít các chỉ tiêu quan trọng nhất, với cùng một tiềm năng kỹ thuật như nhau có thể chọn chỉ tiêu này làm mục tiêu thiết kế hệ thống.

Sau đây là một số chỉ tiêu tính toán ở mức trung bình, vì vậy các công thức dựa trên cơ sở tính kỳ vọng toán học của các đại lượng ngẫu nhiên.

4. Số kênh bận trung bình (hay số yêu cầu trung bình có trong hệ thống): $\overline{N_b} = \sum_{k=0}^{n} kP_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} P_0 = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} P_0$

$$= \alpha(1 - P_n) = \alpha[1 - \frac{P(\alpha, n)}{R(\alpha, n)}] = \alpha.P_{pv}$$

5. Số kênh rỗi trung bình: $\overline{N_r} = n - \overline{N_b}$

6. Hệ số bận (rỗi): $H_b = \frac{\overline{N_b}}{n}$

$$H_r = 1 - H_b.$$

7. Hiệu quả chung: F

Tuỳ thuộc vào cách đánh giá lợi ích và thiệt hại trong quá trình phục vụ và việc tận dụng công suất hệ thống cũng như

các loại lợi ích khác, người ta có thể lập một chỉ tiêu tổng hợp đánh giá hiệu quả chung của hệ thống. Chẳng hạn:

Việc phục vụ 1 yêu cầu mang lại 1 lợi ích là c_{pv}; mỗi yêu cầu bị từ chối gây thiệt hại là c_{tc}; mỗi kênh rỗi gây lãng phí c_{kr}; thì trong 1 đơn vị thời gian có thể tính được chỉ tiêu hiệu quả chung là:

$$F = \lambda P_{pv} c_{pv} - \overline{N_r}\, c_{kr} - \lambda P_n c_{tc}.$$

Trên cơ sở các chỉ tiêu đó ta có thể chọn một hay một vài chỉ tiêu để tối ưu hoá hệ thống.

e. Phân tích và cải tiến hệ thống

Trong thực tế, ngoài việc đánh giá hệ thống phục vụ công cộng bằng một số chỉ tiêu, xuất phát từ các giá trị xác suất cơ bản như giá trị các biến nội sinh của mô hình, người ta còn quan tâm đến sự biến động của các chỉ tiêu đó khi các tham số của hệ thống (với tư cách các biến ngoại sinh) thay đổi. Trên cơ sở phân tích cụ thể các chỉ tiêu này người ta có thể cải tiến hệ thống theo một hay một số chỉ tiêu chủ yếu. Sau đây là một số phân tích cụ thể và một vài hướng cải tiến hệ thống:

1. Trước tiên ta xem xét vấn đề hiệu suất lý thuyết của một hệ thống phục vụ công cộng kiểu Eclang phụ thuộc vào n và α như thế nào: Hiệu suất lý thuyết được xem là công suất phục vụ tối đa của hệ thống, chỉ tiêu này được tính theo công thức: $P_n = \frac{\alpha^n}{n!} P_0 = \frac{P(\alpha, n)}{R(\alpha, n)}$. Như vậy hiệu suất lý thuyết là không đổi nếu số kênh và hệ số đảm nhận yêu cầu của mỗi kênh không đổi. Tuy nhiên khi $\alpha/n < 1$ thì $P(\alpha,n)$ là hàm giảm theo n, khi n tăng P_n giảm, hay hiệu suất lý thuyết giảm.

Nếu lấy đạo hàm bậc nhất của P_n theo α ta thấy:

$$P_n'(\alpha) = \frac{\dfrac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{n=0}^{n}\dfrac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}}{\left(\sum_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}\right)^2} \geq 0$$

Vậy khi α tăng, hiệu suất lý thuyết tăng.

Như vậy trong điều kiện nhu cầu không có cạnh tranh (tức là λ không đổi) thì giảm số kênh hay giảm năng suất kênh sẽ tận dụng được công suất thiết bị. Kết luận này sẽ không có ý nghĩa khi hệ thống phục vụ chỉ tồn tại trong điều kiện tiện lợi tối thiểu đối với các yêu cầu.

2. *Vấn đề thu hút nhu cầu và chất lượng phục vụ :* Rõ ràng là độ thu hút nhu cầu được đánh giá qua khả năng phục vụ của hệ thống (ngoài các chỉ số như giá cả, thời gian phục vụ...). Chỉ tiêu tỉ lệ yêu cầu đến hệ thống được phục vụ có thể xem là thước đo chỉ số này. Ta có $P_{pv} = 1 - P_n$. Trên quan điểm thu hút yêu cầu, hành vi của hệ thống phục vụ rõ ràng là ngược chiều với việc tăng hiệu suất của hệ thống. Có thể kết hợp hai chỉ tiêu này bằng cách cho mỗi chỉ tiêu một trọng số (đánh giá lợi ích) hoặc đặt trước một chỉ tiêu và tìm cách hướng chỉ tiêu thứ hai có lợi nhất cho cơ sở phục vụ.

Hàm F nêu trên thực chất là 1 trong hai cách làm như vậy: ta có thể biến đổi chút ít hàm F như sau:

$$F = \lambda P_{pv}c_{pv} - \overline{N_r}\, c_{kr} - \lambda P_n c_{tc} = \lambda P_{pv}c_{pv} - (n - \alpha P_{pv})c_{kr} - \lambda(1 - P_{pv})c_{tc}$$

$$= \lambda P_{pv}c_{pv} - nc_{rk} + \alpha P_{pv}\, c_{kr} - \lambda c_{tc} + \lambda\, P_{pv}c_{tc}$$

$$= P_{pv}(\lambda c_{pv} + \lambda c_{tc} + \alpha c_{kr}) - nc_{kr} - \lambda c_{tc}.$$

Với một hệ thống phục vụ có thể xem λ là cho trước (tham số) vấn đề còn lại là năng suất kênh và số kênh (biến ngoại sinh) hoặc ngược lại số kênh và năng suất kênh cho trước (tham số) và λ thay đổi (biến ngoại sinh) sẽ làm thay đổi chỉ tiêu hiệu quả này. Bằng các công cụ đạo hàm và vi phân đã trình bày trong phần phân tích tĩnh ở chương I, chúng ta có thể khảo sát sự thay đổi của hiệu quả F khi có sự thay đổi các biến ngoại sinh trong mỗi trường hợp.

f. Thí dụ

Thí dụ 4. 3: Bộ phận kiểm trả sản phẩm của một cơ sở sản xuất có 3 máy làm việc tự động, năng suất các máy đều là 6 sản phẩm một phút. Mỗi sản phẩm ra khỏi dây chuyền đến bộ phận kiểm tra nếu gặp lúc có máy rỗi sẽ được kiểm tra tại 1 trong các máy rỗi, ngược lại sản phẩm nhập kho không qua kiểm tra. Dòng sản phẩm ra khỏi dây chuyền là dòng Poát xông dừng mật độ trung bình 12 sản phẩm một phút. Thời gian kiểm tra 1 sản phẩm phân phối chỉ số.

a- Tính các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của bộ phận kiểm tra.

b- Nếu muốn tỷ lệ sản phẩm được kiểm tra không nhỏ hơn 96% thì cần có tối thiểu bao nhiêu máy như vậy.

c- Nếu ba máy đặt kế tiếp nhau như 3 hệ thống từ chối có điển nối tiếp thì tỷ lệ sản phẩm được kiểm tra sẽ tăng hay giảm* (bài tập cho sinh viên).

Giải: Đây là một hệ thống phục vụ công cộng Eclang với các tham số:

Số kênh: n = 3

Năng suất: μ = 6

Dòng vào mật độ: $\lambda = 12$

$\alpha = 2$

a- Các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của hệ thống

$$P_0 = 0.157895$$
$$\frac{P_{tc}}{N_b} = 0.210526$$
$$H_b = 0.526316$$

b- Ta nhận thấy $P_{tc} > 0,04$, như vậy cần tăng số kênh sao cho $P_{tc} < 0,04$ thì tỷ lệ sản phẩm được kiểm tra sẽ không nhỏ hơn 96%. Bảng sau là các giá trị P_{tc} tương ứng với số kênh n:

n	3	4	5
P_{tc}	0.210526	0.095238	0.036697

Vậy n = 5 tỷ lệ sản phẩm được kiểm tra không nhỏ hơn 96%.

Thí dụ 4.4: Để thiết lập 1 trạm xử lý tin nóng người ta có thể chọn một trong hai phương án:

- Phương án 1: Lắp đặt 10 máy, mỗi máy trung bình 1 giờ xử lý được 4 bản tin.

- Phương án 2: Lắp đặt 8 máy, mỗi máy trung bình 1 giờ xử lý được 5 bản tin.

Trạm làm việc theo chế độ của hệ thống Eclang, dòng các bản tin cần xử lý là dòng Poát xông dừng có trung bình 30 bản tin/giờ. Hãy chọn phương án có khả năng xử lý tin cao hơn.

Hướng dẫn giải:

Gọi H_1 là hệ thống theo phương án 1 và H_2 là hệ thống theo phương án 2. Đây là hai hệ thống phục vụ công cộng từ chối cổ điển, với các công thức đã tính ở trên, ta tính các xác suất phục vụ của từng hệ thống:

Với H_1 ta có: $P_{pv}(1) = 0,9005$.

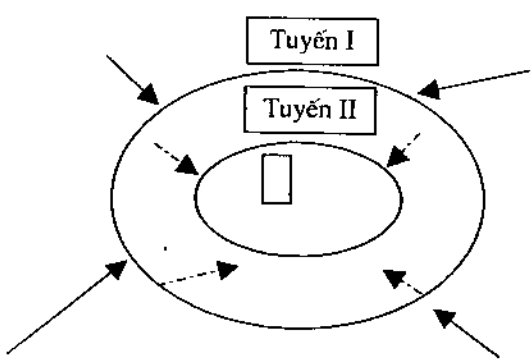
Với H_2 ta có: $P_{pv}(2) = 0,8701$.

Vậy chọn phương án thứ nhất.

2. Hệ thống Eclang nối tiếp

Trong bài này ta sẽ xem xét một cách thiết kế hệ thống thường được mô tả như một hệ thống phòng thủ. Trên cơ sở phân tích, thiết kế hệ thống chúng ta sẽ đánh giá hiệu quả của các thiết kế qua một chỉ tiêu thông dụng và có ý nghĩa thực tế.

Giả sử một hệ thống phòng thủ 2 tuyến được mô tả như sau:



Để đơn giản cho quá trình tính toán, ta giả sử mỗi tuyến có một hệ thống phòng thủ với khả năng tiêu diệt đối phương tương ứng thể hiện như năng suất của các kênh: μ_1 và μ_2. Đối phương có lực lượng đột nhập trung bình λ đơn vị trong một đơn vị thời gian. Giả sử các dòng biến cố tương ứng với lực lượng đột nhập cũng như lực lượng đột nhập bị tiêu diệt đều là các dòng Poát xông dừng.

1- Hãy xác định tỷ lệ đơn vị có thể đột nhập qua cả hai tuyến phòng thủ.

2- Nếu μ_1 khác μ_2 nên bố trí các tuyến phòng thủ như thế nào thì hiệu quả hơn (tỷ lệ đơn vị đột nhập qua cả hai tuyến thấp hơn).

Mô hình hệ thống phục vụ công cộng

Ta có thể mô tả hệ thống trên với các yếu tố như sau:

Xét một hệ thống phục vụ công cộng hai kênh nối tiếp, trong đó dòng yêu cầu đến hệ thống thứ nhất là dòng các đơn vị đột nhập của đối phương với mật độ $\lambda_1 = \lambda$; năng suất phục vụ của kênh μ_1. Hệ thống thứ hai là hệ một kênh với năng suất μ_2 - và dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng các yêu cầu bị từ chối (chưa bị tiêu diệt) của hệ thống thứ nhất λ_2.

1- Tỷ lệ đơn vị đột nhập qua cả hai tuyến chính là xác suất 1 yêu cầu bị từ chối ở cả hai hệ thống nối tiếp nói trên.

Ta có tỷ lệ yêu cầu bị từ chối ở hệ thống thứ nhất là:

$$P_{tc}(1) = \frac{\alpha}{1!} P_0(1) = \frac{P(\alpha,1)}{R(\alpha,1)} \qquad (\alpha = \frac{\lambda_1}{\mu_1})$$

Hay đơn giản hơn là:

$$P_{tc}(1) = \frac{\frac{\lambda_1}{\mu_1}}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1}} = \frac{\lambda_1}{\mu_1 + \lambda_1}$$

Ta có dòng yêu cầu đến hệ thống thứ 2 có mật độ $\lambda_2 = P_{tc}(1)\lambda_1$, hay $\lambda_2 = \frac{\lambda_1^2}{\mu_1 + \lambda_1}$

Tương tự hệ thống 1, với hệ thống 2 xác suất từ chối được tính theo công thức sau:

$$P_{tc}(2) = \frac{\lambda_2}{\mu_2 + \lambda_2}$$

Số yêu cầu bị từ chối: $P_{tc}(2)\lambda_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2 + \lambda_2}\lambda_2$

Tỷ lệ yêu cầu bị từ chối:

$$P_{tc}(1,2) = \frac{\lambda_2}{\mu_2 + \lambda_2}\lambda_2 \frac{1}{\lambda_1}. \text{ Thay } \lambda_2 = \frac{\lambda_1^2}{\mu_1 + \lambda_1}$$

Ta có: $P_{tc}(1,2) = \frac{\lambda_2\lambda_1}{(\mu_2 + \lambda_2)(\lambda_1 + \mu_1)}$

Bằng một vài phép rút gọn ta có:

$$P_{tc}(1,2) = \frac{\lambda^3}{(\lambda + \mu_1)^2\mu_2 + \lambda^2(\mu_1 + \lambda)}$$

2- Nếu μ_1 khác μ_2, hoàn toàn tương tự ta có tỷ lệ từ chối yêu cầu của hệ thống khi đảo thứ tự hai hệ thống cấu thành như sau:

$$P_{tc}(2,1) = \frac{\lambda^3}{(\lambda + \mu_2)^2 \mu_1 + \lambda^2 (\mu_2 + \lambda)}$$

Từ đó ta thấy $P_{tc}(1,2) < P_{tc}(2,1)$ nếu:

$$(\lambda + \mu_1)^2 \mu_2 + \lambda^2 (\mu_1 + \lambda) > (\lambda + \mu_2)^2 \mu_1 + \lambda^2 (\mu_2 + \lambda)$$

hay: $\mu_1 > \mu_2$.

Kết quả trên cho thấy cần bố trí tuyến thứ nhất là tuyến mạnh hơn.

Thí dụ 4.5: Một cơ sở sản xuất bố trí một trạm kiểm tra sản phẩm với hai máy kiểm tra tự động có năng suất tương ứng 12 và 20 sản phẩm/giờ. Dòng sản phẩm ra khỏi dây chuyền sản xuất cần được kiểm tra có trung bình 30 sản phẩm/giờ. Giả sử dòng sản phẩm cần kiểm tra và các dòng sản phẩm được kiểm tra qua các máy là dòng Poát xông dừng. Hãy tính tỷ lệ sản phẩm được kiểm tra trong trường hợp hai máy bố trí nối tiếp như hai hệ Eclang với thứ tự khác nhau.

a- Hệ 1: Bố trí máy 1 có năng suất 12 sản phẩm/giờ, máy 2 năng suất 20 sản phẩm/giờ.

Tỷ lệ sản phẩm không được kiểm tra ở máy 1: $P_{tc} = 0,7143$

Trung bình 1 giờ máy hai có 21,43 yêu cầu (sản phẩm cần kiểm tra)

Tỷ lệ sản phẩm không được kiểm tra ở máy 2: $P_{tc} = 0,5172$

Số sản phẩm không được kiểm tra cuối cùng là:

$$0,5172 \times 21,43 = 11,0836$$

Tỷ lệ sản phẩm được kiểm tra: 63,05%

b- Hệ 2: Bố trí máy 1 có năng suất 20 sản phẩm/giờ, máy 2 năng suất 12 sản phẩm/giờ.

Tỷ lệ sản phẩm không được kiểm tra ở máy 1: $P_{tc} = 0,6000$

Trung bình 1 giờ máy hai có 18 yêu cầu (sản phẩm cần kiểm tra)

Tỷ lệ sản phẩm không được kiểm tra ở máy 2: $P_{tc} = 0,6000$

Số sản phẩm không được kiểm tra cuối cùng: 10,8

Tỷ lệ sản phẩm được kiểm tra: 64,00%

3. Hệ thống chờ với độ dài hàng chờ hạn chế và thời gian chờ không hạn chế

Một lớp các hệ thống phục vụ công cộng khác cũng khá phổ biến, đó là hệ thống có chờ. Đối với các hệ thống này, mỗi yêu cầu tuỳ thuộc vào chế độ tiếp nhận của hệ thống phục vụ và đặc điểm của các yêu cầu có thể được phục vụ trong điều kiện nào đó (thời gian, số chỗ chờ) nhưng phải xếp hàng chờ, khi hệ thống có tất cả các kênh bận. Trong thực tế, tình huống phổ biến là độ dài hàng chờ và cả thời gian chờ đều hạn chế, tuy vậy nếu độ dài hàng chờ hạn chế thì cũng có thể xem thời gian chờ của một yêu cầu hầu như là hạn chế. Để đơn giản cho việc nghiên cứu, ta sẽ xem xét mô hình phục vụ công cộng với độ dài hàng chờ hạn chế hay còn gọi là *hệ thống chờ với độ dài hàng chờ hạn chế*.

a. Mô tả hệ thống

Một hệ thống phục vụ công cộng có n kênh phục vụ, năng suất các kênh bằng nhau và bằng μ, dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng Poát xông dừng mật độ λ. Thời gian phục

vụ một yêu cầu của kênh tuân theo qui luật mũ. Một yêu cầu đến hệ thống gặp lúc có ít nhất 1 kênh rỗi thì được nhận phục vụ cho đến thoả mãn tại một trong các kênh rỗi đó. Ngược lại, nếu tất cả các kênh đều bận thì xếp hàng chờ nếu số yêu cầu chờ bé hơn m. Cần xác định các chỉ tiêu phân tích hệ thống.

b. Quá trình thay đổi trạng thái và sơ đồ trạng thái của hệ thống

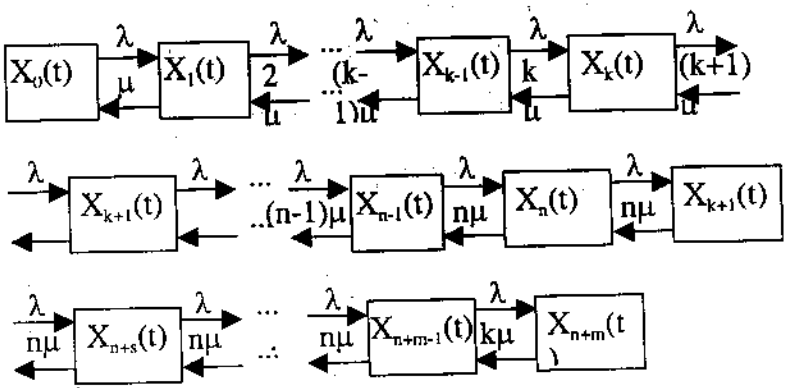
+Trạng thái

Ta quan tâm đến hiệu quả phục vụ của hệ thống, vì vậy đặc trưng được chọn để xác định trạng thái là số kênh bận tại mỗi thời điểm.

Gọi $X_k(t)$ *là trạng thái hệ thống có k kênh bận tại thời điểm* t (k = 0, 1, 2,..., n)

$X_{n+s}(t)$ *là trạng thái hệ thống có n kênh bận và s yêu cầu chờ tại thời điểm* t (s = 1,2,..., m).

+ Sơ đồ chuyển trạng thái



Sơ đồ trên thiết lập trên cơ sở phân tích tính chất của các dòng Poát xông như đã nói ở hệ thống Eclang.

c. Hệ phương trình trạng thái và các xác suất trạng thái

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1$$

$$0 = -\lambda P_1 - \mu P_1 + \lambda P_0 + 2\mu P_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$0 = -\lambda P_k - k\mu P_k + \lambda P_{k-1} + (k+1)\mu P_{k+1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 = -n\mu P_n - \lambda P_n + \lambda P_{n-1} + n\mu P_{n+1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 = -n\mu P_{n+s} - \lambda P_{n+s} + \lambda P_{n+s-1} + n\mu P_{n+s+1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 = -n\mu P_{n+m} + \lambda P_{n+m-1}.$$

với điều kiện chuẩn là: $\sum_{k=0}^{n} P_k = 1.$

Đặt $\alpha = \lambda/\mu$ từ (1) ta có:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 \text{ và } P_{n+s} = \frac{\alpha^n \alpha^s}{n! n^s} P_0 \quad (2)$$

Nếu $\alpha/n = 1$ thì $P_{n+s} = \frac{\alpha^n}{n!} P_0 = P_n$ (*)

Đặt $x = \alpha/n$. Thay vào điều kiện chuẩn ta có:

- Khi $x \neq 1$: $P_0 (\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \sum_{}^{m} x\ ) = 1$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{m} x^s}$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} x \frac{(1 - x^m)}{1 - x}}$$

Hay: $P_0 = \frac{P(\alpha.0)}{R(\alpha, n) + P(\alpha.n) \frac{x(1 - x^m)}{1 - x}}$.

- Khi x = 1 thì $P_0 = \frac{P(\alpha.0)}{R(\alpha.n) + P(\alpha.n)m}$, (**)

d. Các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của hệ thống

1- Xác suất hệ thống có n kênh rỗi: $P_r = P_0$

2- Xác suất một yêu cầu đến hệ thống phải chờ: P_c

$$P_c = \sum_{s=0}^{m-1} P_{n+s} = \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=0}^{m-1} x^s P_0$$

$$= \frac{P(\alpha, n)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)x \frac{(1 - x^m)}{1 - x}} \frac{(1 - x^m)}{(1 - x)} \text{ (khi } x \neq 1)$$

khi x = 1 thì $P_c = mP_n$.

3- Xác suất một yêu cầu bị từ chối: P_{tc}

$$P_{tc} = P_{n+m} = \frac{\alpha^n}{n!} x^m P_0$$

- Khi x ≠ 1

$$P_{tc} = \frac{P(\alpha, n)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)x\,\frac{(1 - x^m)}{1 - x}}\,x^m$$

khi x = 1 $P_{tc} = P_{n+m} = P_n$.

4- Xác suất một yêu cầu đến hệ thống được phục vụ ngay:

$$P_{opv} = 1 - P_{tc} - P_c$$

5- Số kênh bận trung bình:

$$\overline{N_b} = \sum_{k=0}^{n} kP_k + n\sum_{s=1}^{m} P_{n+s} = \sum_{k=1}^{n} kP_k + n\sum_{s=1}^{m} P_{n+s} =$$

- Khi x ≠ 1 thì $= \dfrac{\alpha R(\alpha, n-1) + nP(\alpha, n)\dfrac{x}{1-x}(1 - x^m)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)\dfrac{x}{1-x}(1 - x^m)}$.

- Khi x = 1 thì $\overline{N_b} = \dfrac{\alpha R(\alpha, n-1) + nmP(\alpha, n)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)m}$.

6- Độ dài hàng chờ trung bình:

-Khi x ≠ 1 thì $\overline{M_c} = \sum_{s=0}^{m} sP_{n+s} = \dfrac{P(\alpha, n)\sum_{s=0}^{m} sx^s}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)x\,\dfrac{1 - x^m}{1 - x}}$

Trong đó:

$$\sum_{k=0}^{n} sx^s = x\sum_{s=1}^{m} sx^{s-1} = x\,\frac{\partial \sum_{s=0}^{m-1} x^s}{\partial x} = \frac{x}{(1-x)^2}[(m-1)x^m - mx^{m-1} + 1]$$

Khi x = 1 thì $\overline{M_c} = P_n \frac{m(m+1)}{2}$

7- Thời gian rỗi giữa hai lần phục vụ:

$$\overline{T_r} = \overline{T_{pv}} \frac{1-H_b}{H_b} = \frac{1-\frac{\overline{N_b}}{n}}{\mu \frac{\overline{N_b}}{n}}$$

8- Thời gian trung bình của một yêu cầu ở trong hệ thống:

Thời gian chờ của mỗi yêu cầu được xác định bằng khoảng thời gian hệ thống giải phóng mỗi yêu cầu và số yêu cầu chờ hiện có. Vì vậy, nếu gọi thời gian chờ là T_c thì $T_c = 0$ khi hệ thống còn kênh rỗi; khi có s yêu cầu chờ thì thời gian chờ của mỗi yêu cầu trung bình sẽ là $s/n\mu$, vì vậy có thể tính thời gian chờ trung bình như sau:

$$\overline{T_c} = \sum_{s=0}^{m} \frac{s}{n\mu} P_{n+s} = \frac{1}{\lambda} \sum_{s=0}^{m} s P_{n+s+1}$$

Hay: $\overline{T_c} = \frac{\overline{Mc}}{\lambda}$.

Thí dụ 4.6.

Một trạm đăng kiểm xe máy có 2 tổ làm việc độc lập, năng suất mỗi tổ 6 xe/ngày. Dòng xe đến trạm là dòng Poát xông dừng trung bình 10 xe/ngày. Thời gian đăng kiểm 1 xe tuân theo qui luật mũ. Một xe đến trạm nếu gặp lúc có tổ rỗi thì được nhận ngay tại một tổ rỗi, ngược lại, phải chờ nếu số xe

chờ chưa quá 9. Tính các chỉ tiêu phân tích hoạt động của trạm trên như một hệ thống phục vụ.

Giải.

Số kênh phục vụ: n = 2

Năng suất 1 kênh: $\mu = 6$

Mất độ dòng vào: $\lambda = 10$

Số chỗ chờ tối đa: m = 10

$\alpha = \lambda/\mu = 1,666667$

$\alpha/n = 0,833333$

Các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của trạm:

1- Xác suất trạm có 2 kênh rỗi là $P_0 = 0,101231$

2- Xác suất 1 yêu cầu phải chờ là $P_c = 0,707344$

3- Xác suất từ chối 1 yêu cầu là $P_{tc} = 0,022707$

4- Xác suất 1 yêu cầu được phục vụ ngay là $P_{opv} = 0,269948$

5- Số kênh bận trung bình là $N_b = 1,628821$

6- Độ dài hàng chờ trung bình: $M_c = 2,401353$

7- Thời gian chờ trung bình: $T_c = 0,162882$

8- Thời gian rỗi trung bình giữa hai lần phục vụ của kênh là $T_r = 0,03798$

4. Hệ thống chờ thuần nhất

Trong điều kiện hệ thống chờ với độ dài hàng chờ và thời gian chờ đủ lớn, việc một yêu cầu đến hệ thống được phục vụ là một biến cố hầu như chắc chắn. Nói cách khác,

người ta không cần quan tâm đến việc có còn chỗ chờ hay không và cũng không quan tâm đến thời gian chờ dài hay ngắn. Với mục đích tiện lợi cho việc phân tích hệ thống, sau đây ta xem xét mô hình hệ thống phục vụ công cộng chờ với độ dài hàng chờ và thời gian chờ không hạn chế : *Hệ thống chờ thuần nhất.*

a. Mô tả hệ thống

Hệ thống phục vụ công cộng có n kênh phục vụ, năng suất các kênh bằng nhau và bằng μ, dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng Poát xông dừng mật độ λ. Thời gian phục vụ 1 yêu cầu của kênh tuân theo qui luật mũ. Một yêu cầu đến hệ thống gặp lúc có ít nhất 1 kênh rỗi thì được nhận phục vụ cho đến thoả mãn tại 1 trong các kênh rỗi đó. Ngược lại nếu tất cả các kênh đều bận thì xếp hàng chờ. Cần xác định các chỉ tiêu phân tích hệ thống.

b. Quá trình thay đổi trạng thái - sơ đồ trạng thái của hệ thống

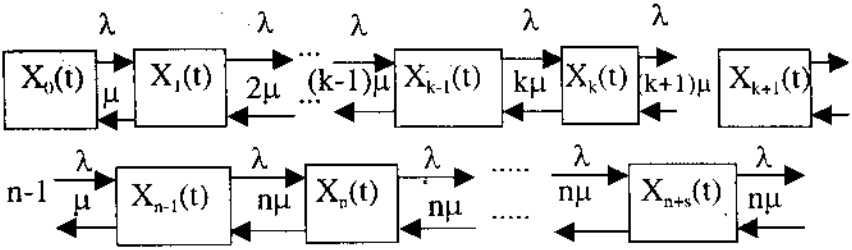
+ Trạng thái

Ta quan tâm đến hiệu quả phục vụ của hệ thống, vì vậy đặc trưng được chọn để xác định trạng thái là số kênh bận tại mỗi thời điểm.

Gọi $X_k(t)$ là trạng thái hệ thống có k kênh bận tại thời điểm t (k = 0,1,2,..., n).

$X_{n+s}(t)$ là trạng thái hệ thống có n kênh bận và s yêu cầu chờ tại thời điểm t (s = 1,2,.....).

+ Sơ đồ chuyển trạng thái



Sơ đồ trên thiết lập trên cơ sở phân tích tính chất của các dòng Poát xông như đã nói ở hệ thống Eclang.

c. Hệ phương trình trạng thái và các xác suất trạng thái

Áp dụng qui tắc viết hệ phương trình xác suất trạng thái, ta có thể viết hệ phương trình trạng thái của hệ thống này.

Trong đó các phương trình ứng với các trạng thái từ $X_0(t)$ đến $X_n(t)$ không có gì khác so với các hệ phương trình trên, từ các trạng thái sau $X_n(t)$ ta có vô số trạng thái có cấu trúc sơ đồ như nhau vì vậy các phương trình cũng như nhau.

Cụ thể là:

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1$$

$$0 = -\lambda P_1 - \mu P_1 + \lambda P_0 + 2\mu P_2$$

..... (1)

$$0 = -\lambda P_k - k\mu P_k + \lambda P_{k-1} + (k+1)\mu P_{k+1}$$

.....

$$0 = -n\mu P_n - \lambda P_n + \lambda P_{n-1} + n\mu P_{n+1}$$

.....

$$0 = -n\mu P_{n+s} - \lambda P_{n+s} + \lambda P_{n+s-1} + n\mu P_{n+s+1}$$

.....

với điều kiện chuẩn là: $\sum_{k=0}^{n} P_k = 1.$

Đặt $\alpha = \lambda/\mu$ từ (1) ta có:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 \text{ và } P_{n+s} = \frac{\alpha^n \alpha^s}{n! n^s} P_0 . \qquad (2)$$

d. Tính các chỉ tiêu

Để tính các xác suất trạng thái và các chỉ tiêu ta chỉ cần lấy giới hạn các công thức đã có ở hệ thống chờ hạn chế với m dần tới vô hạn và $\alpha/n < 1$. Trong trường hợp ngược lại $\alpha/n \geq 1$ hệ thống không thể tồn tại, vì số yêu cầu chờ tăng vô hạn xác suất hệ thống ở một trạng thái $X_k(t)$ với k hữu hạn bằng không.

Ta có các công thức tương ứng như sau:

1- Xác suất hệ thống có n kênh rỗi: $P_r = P_0$.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^s} = \frac{P(\alpha,0)}{R(\alpha,n) + P(\alpha,n)\frac{x}{1-x}}.$$

2- Xác suất một yêu cầu đến hệ thống phải chờ: P_c

$$P_c = \sum_{s=0}^{\infty} P_{n+s} = P_0 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^s = P_0 \frac{\alpha^n}{n!} \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{P(\alpha,n)\frac{1}{1-x}}{R(\alpha,n) + P(\alpha,n)\frac{x}{1-x}}.$$

3- Xác suất một yêu cầu đến hệ thống được phục vụ ngay:

$$P_{pvo} = 1 - P_c.$$

4- Số kênh bận trung bình:

$$\overline{N_b} = \sum_{k=0}^{n} kP_k + n\sum_{s=1}^{\infty} P_{n+s} = P_0 \sum_{K=1}^{n} k\frac{\alpha^k}{k!} + nP_0\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{\infty} x^s$$

$$= P_0(\alpha\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha^k}{k!} + n\frac{\alpha^n}{n!}\frac{x}{1-x}) = \frac{\alpha R(\alpha, n-1) + P(\alpha, n)n\dfrac{x}{1-x}}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)\dfrac{x}{1-x}}.$$

5-Độ dài hàng chờ trung bình:

$$\overline{M_c} = \sum_{s=0}^{\infty} sP_{n+s} = P_0\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=0}^{\infty} x^s$$

$$= \frac{xP(\alpha, n)}{(1-x)^2 R(\alpha, n) + P(\alpha, n)\dfrac{x}{1-x}}.$$

6- Thời gian trung bình yêu cầu ở trong hệ thống:

$$\overline{T_c} = \frac{\overline{M_c}}{\lambda}.$$

7- Thời gian rỗi giữa hai lần phục

$$\overline{T_r} = \overline{T}_{pv}\frac{1-H_b}{H_b} = \frac{1 - \dfrac{\overline{N_b}}{n}}{\mu\dfrac{\overline{N_b}}{n}}.$$

Trong thực tế *khi m đủ lớn* người ta sử dụng các công thức của hệ chờ thuần nhất cho hệ thống chờ hạn chế, làm như vậy việc tính các chỉ tiêu sẽ đơn giản hơn.

c. Thí dụ

Thí dụ 4. 7: Một thư viện có 6 người làm thư mục sách, mỗi giờ một người làm được trung bình 4 cuốn. Trung bình mỗi giờ có 18 cuốn sách về thư viện cần làm thư mục. Nếu một cuốn sách về gặp lúc có người làm thư mục rỗi thì được làm thư mục ngay, ngược lại phải xếp tạm vào kho chờ làm thư mục. Dung tích kho đủ lớn và giả sử dòng sách về là dòng Poát xông dừng, còn thời gian làm thư mục tuân theo qui luật mũ. Hãy tính các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của tổ làm thư mục.

Giải:

Ta xem tổ làm thư mục là một hệ thống chờ thuần nhất với:

Số kênh		6
Năng suất		4
Mật độ dòng vào		18
Từ đó ta có α	=	4,5
α/n	=	0,75

Các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của tổ:

1- Xác suất tổ có 6 người rỗi: $P(0) = 0,00914$

2- Xác suất một cuốn sách phải chờ làm thư mục $P_c = 0,42165$

3- Xác suất một cuốn sách được làm thư mục ngay: $P_{opv} = 0,75835$

4- Số người bận trung bình: $\overline{N}_b = 4,5$

5- Số sách trung bình trong kho chờ làm thư mục: $M_c = 0,1054$

6- Thời gian trung bình từ lúc sách về đến khi làm thư mục: $T_c = 0,25$.

Thí dụ 4.8: Xác định số mô tơ cần dự trữ trong kho của một cơ sở sản xuất dùng để thay thế cho một loại thiết bị sao cho tổn thất trong năm là nhỏ nhất. Biết rằng hàng năm cần trung bình 1095 mô tơ để thay thế. Thời gian chờ để mua và nhập kho một mô tơ trung bình là 2,5 ngày (đây cũng là thời gian thay thế xong 1 mô tơ làm cho chỗ của mô tơ lấy ra khỏi kho thực sự trống). Tổn thất do thiếu một mô tơ thay thế trong một ngày là 300 nghìn đồng. Giá một mô tơ là 3 triệu đồng; chi phí bảo quản một mô tơ trong năm trung bình 1% theo giá mô tơ.

Giải: Đây thực chất là một dạng của bài toán dự trữ sẽ được trình bày trong chương V. Thí dụ này đưa ra một cách mô tả một dạng bài toán dự trữ bằng mô hình phục vụ công cộng. Để mô hình hoá bài toán trên ta xem hoạt động của kho là một hệ thống chờ thuần nhất với số kênh (n) là số chỗ dự trữ mô tơ (qui mô dự trữ cần xác định). Thời gian phục vụ của kênh là thời gian mua và nhập kho một mô tơ. Qui tắc hoạt động của hệ thống là: Khi có một mô tơ hỏng và trong kho có mô tơ thì một mô tơ được lấy khỏi kho để thay thế và xuất hiện chỗ trống để nhập tiếp mô tơ. Ngược lại, không có mô tơ trong kho thì thiết bị này phải chờ.

Để giải bài toán tối ưu kinh tế nói trên với mô hình phục vụ công cộng ta cần xác định hai chỉ tiêu cho mỗi mô hình có k kênh đó là: Thời gian chờ trung bình (P_c), độ dài hàng chờ

trung bình (M_c) và thời gian rỗi trung bình giữa hai lần phục vụ (T_r).

Các tham số của bài toán như sau:

Cường độ dòng yêu cầu (ngày): 1095/365 = 3.

Thời gian phục vụ trung bình: 2,5

Số kênh n (phải tìm)

Ta có: $\alpha = 3.\ 2,5 = 7,5$.

Với mỗi số k ta tính tổn thất theo công thức:

$TC(k, \alpha) = 300T_cM_c + kT_r\ 0,01.\ 3000.$

Như đã chỉ ra ở trên ta phải bắt đầu tư $k > \alpha$.

Bảng tính toán sau đây cho lời giải của bài toán:

k	Mc	Tc	Tr	TC
8	12,11	4,04	0,17	14718,12
9	2,25	0,85	0,5	708,75
10	**0,92**	**0,31**	**0,83**	**334,56**
11	0,38	0,13	1,17	400,92
12	0,16	0,05	1,5	542,4
13	0,07	0,02	1,83	714,12
14	0,03	0,01	2,17	911,49

Như vậy cần dự trữ 10 mô tơ (n = 10).

Bài tập chương IV

1. Hai hệ thống xếp hàng (pvđđ) trong đó dòng và các hệ thống là tối giản và có cường độ λ.

Hệ 1: n kênh, năng suất mỗi kênh là μ.

Hệ 2: 1 kênh, năng suất $n\mu$.

Chứng minh với $\mu > 0$; $\lambda > 0$ và $n > 1$ xác suất phục vụ của hệ thống 1 lớn hơn xác suất phục vụ của hệ thống 2.

2. Chứng minh rằng với $m > 0$ bất kỳ hệ thống chờ với độ dài hàng chờ hạn chế (m) có tỷ lệ yêu cầu được phục vụ cao hơn hệ thống từ chối cổ điển.

3. Một cửa hàng dịch vụ rửa xe có 2 dây phục vụ, trung bình mỗi dây phục vụ xong 1 xe mất 30 phút. Dòng xe yêu cầu phục vụ là dòng Poát xông dừng với cường độ 4 xe/giờ. Nguyên tắc phục vụ của cửa hàng là nguyên tắc của hệ từ chối và mỗi ngày làm việc 10 giờ.

a. Tính số xe được phục vụ trong ngày.

b. Muốn tỷ lệ xe không được phục vụ ít hơn 20% thì cần bao nhiêu dây phục vụ với năng suất như trên? Với số dây tối thiểu đó, mỗi ngày cửa hàng thu được số tiền lãi trung bình là bao nhiêu? Biết chi phí phục vụ 1 xe là 15.000 đồng/xe, chi phí cho 1 ngày 100.000 đồng và nếu mỗi dây rỗi sẽ gây lãng phí 40.000 đồng/ngày.

4. Bộ phận kiểm tra chất lượng sản phẩm của 1 xí nghiệp gồm 2 máy kiểm tra tự động được bố trí liên tiếp nhau. Năng suất của các máy như nhau và bằng 6 sản phẩm/phút

Nguyên tắc phục vụ của mỗi máy như là một hệ từ chối 1 kênh và sản phẩm không được kiểm tra ở máy 1 thì được tự động chuyển sang kiểm tra ở máy 2. Dòng sản phẩm được tự động chuyển đến bằng băng chuyền và trung bình 1 phút có 6 sản phẩm đến máy 1.

Hãy xác định tỷ lệ sản phẩm được kiểm tra qua 2 máy.

5. Một cửa hàng bảo hành xe máy Honda có 5 công nhân phục vụ và một diện tích để 10 xe chờ. Dòng xe có nhu cầu bảo hành giả thiết là dòng tối giản với trung bình 4 xe/giờ. Thời gian trung bình bảo trì xong 1 xe của 1 công nhân mất 1 giờ, mỗi công nhân bảo hành 1 xe.

Hãy tính các chỉ tiêu:

- Xác suất phục vụ.

- Số công nhân bận trung bình.

- Số xe chờ trung bình và thời gian chờ trung bình.

6. Một xí nghiệp sửa chữa xe ô tô có 2 dây phục vụ và 1 diện tích 5 xe chờ. Trung bình trong 1 ngày có 4 xe đến yêu cầu được sửa chữa và trung bình một ngày mỗi dây sửa chữa xong được 2 xe.

a. Tính P_{pv} và suy ra số xe được sửa chữa trong 1 ngày.

b. Tính số xe chờ trung bình và thời gian chờ trung bình của mỗi xe.

c. Nếu tăng thêm 1 dây sửa chữa thì tỷ lệ xe được sửa chữa sẽ là bao nhiêu?

7. Một cây xăng có 2 máy bơm, năng suất như nhau và trung bình 30 xe/giờ. Dòng khách hàng giả thiết là tối giản

có $\lambda = 50$ khách/giờ. Nguyên tắc phục vụ là nguyên tắc của hệ chờ thuần nhất.

Tính tỷ lệ khách hàng phải chờ, độ dài hàng chờ trung bình và thời gian chờ trung bình của khách hàng.

8. Cần xây dựng 1 kho có diện tích bao nhiêu để bảo đảm trên 95% hàng hoá đưa đến được bảo quản trong kho. Biết rằng hàng năm (365 ngày) trung bình có khoảng 75.000 tấn hàng hoá có nhu cầu được bảo quản. Hàng hoá được bảo quản. theo từng lô với khối lượng trung bình 1 lô là 455 tấn và yêu cầu trên 1 m^2 diện tích chỉ bảo quản 0,65 tấn hàng hoá. Thời gian trung bình mỗi lô hàng bảo quản trong kho 10 ngày. Nguyên tắc hoạt động của kho là nguyên tắc của hệ từ chối cổ điển.

9. Một công ty thương mại dự định mở một cửa hàng dịch vụ tổng hợp. Hãy xác định xem công ty cần bố trí bao nhiêu nhân viên phục vụ (bán hàng) để bảo đảm tỷ lệ khách hàng phải chờ không vượt quá 10%. Với giả thiết trung bình 1 giờ có 30 khách đến mua hàng và mỗi nhân viên phục vụ với năng suất 15 khách hàng/giờ. Cửa hàng hoạt động như một hệ chờ thuần nhất.

10. Một trạm sửa chữa máy nông nghiệp có 1 dây phục vụ có một diện tích để 3 máy chờ. Theo số liệu thống kê, trong 1 ngày trung bình có 1 máy bị hỏng yêu cầu được sửa chữa và trung bình trong 2 ngày sửa chữa xong 1 máy. Nguyên tắc phục vụ của trạm là nguyên tắc của hệ chờ hạn chế.

a. Tính các chỉ tiêu p_0, p_{pv}, p_c, $\overline{m}_c$, $\overline{t}_c$ và cho nhận xét tình hình phục vụ của trạm.

b. Nếu tăng thêm 1 dây phục vụ với năng suất như trên thì tình hình phục vụ của trạm sẽ ra sao?

11. Một trung tâm xử lý tin nhanh có 4 tổ làm việc độc lập, được tổ chức như một hệ thống Eclang. Năng suất của mỗi tổ là 3 bản tin/giờ, dòng các bản tin đến cần xử lý là dòng Poát xông dừng trung bình 10 bản tin/giờ.

a. Hãy tính các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của trung tâm.

b. Người ta muốn nâng tỷ lệ bản tin đến trung tâm được xử lý và dự định hai phương án có tổn phí như sau:

1. Tăng thêm 3 tổ có cùng năng suất như các tổ cũ.

2. Nâng năng suất gấp 2 lần cho 4 tổ hiện có.

Nên chọn phương án nào hiệu quả hơn?

12. a Căn cứ vào tỷ lệ xe không được nhận khám tại một trạm khám xe tổ chức theo chế độ từ chối cổ điển; dòng vào là dòng Poát xông dừng trung bình 10 xe/giờ. Hãy cho biết nên chọn phương án nào trong hai phương án sau:

1. Bố trí 4 tổ với năng suất mỗi tổ 5 xe/giờ.

2. Bố trí 5 tổ với năng suất mỗi tổ 4 xe/giờ.

b. Kết luận trên có đúng với dòng vào là dòng Poát xông dừng trung bình y xe/giờ hay không?

13. Một trạm kiểm tra phòng dịch có 4 tổ làm việc độc lập, năng suất mỗi tổ 2 người bệnh/giờ. Mỗi giờ trung bình có 5 người đến cần kiểm tra, trạm làm việc theo chế độ của một trạm phục vụ công cộng Eclang.

a. Tính các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của trạm.

b. Nếu số lượng người cần được kiểm tra tăng gấp đôi nên chọn phương án nào trong hai phương án: tăng gấp đôi năng suất của mỗi tổ hoặc tăng gấp đôi số tổ?

14. Một phòng khám có 3 thầy thuốc, thời gian mỗi thầy thuốc khám cho 1 bệnh nhân trung bình 15 phút. Mỗi giờ trung bình có 9 bệnh nhân đến phòng khám, phòng khám có 6 chỗ chờ cho tối đa 6 bệnh nhân. Hãy tính các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của phòng khám này.

15. Một phòng đăng ký xe máy có 3 tổ làm việc độc lập, mỗi tổ trung bình 1 giờ làm xong thủ tục cho 3 xe, dòng xe đến phòng cần đăng ký là dòng Poát xông dừng trung bình 8 xe/giờ. Phòng làm việc như một hệ thống chờ thuần nhất.

a. Hãy xác định các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của phòng này.

b. Nếu muốn trung bình không quá 6 xe thì cần tối thiểu bao nhiêu tổ như trên?

16. Cần bố trí bao nhiêu máy bơm xăng tại một trạm bán xăng trên một trục đường vào thành phố để đảm bảo trên 95% số xe có nhu cầu mua xăng được đáp ứng. Biết rằng mỗi máy bơm xong cho 1 xe trung bình mất 12 phút, dòng xe đến trạm để mua xăng là dòng tối giản với cường độ 12 xe/giờ trạm hoạt động như một hệ từ chối cổ điển.

17. Một phòng kiểm tra chất lượng sản phẩm tự động có hai máy, năng suất như nhau 24 sản phẩm/phút. Dòng sản phẩm từ dây chuyền đến phòng kiểm tra là dòng Poát xông dừng trung bình 36 sản phẩm/phút. Người ta dự định bố trí theo một trong hai phương án sau:

Phương án 1: Để hai máy song song, làm việc độc lập như

một hệ Eclang 2 kênh. Sản phẩm sẽ vào kho mà không kiểm tra khi cả hai máy bận.

Phương án 2: Để hai máy liên tiếp, máy một bận thì sản phẩm chuyển sang máy hai, nếu máy hai cũng bận thì sản phẩm vào kho không kiểm tra.

Nên chọn phương án nào để tỷ lệ sản phẩm vào kho không kiểm tra nhỏ hơn?

18. Một cơ sở sửa chữa động cơ điện dự tính thực hiện một trong hai phương án:

Phương án 1: Tổ chức 4 tổ sửa chữa năng suất 4 động cơ/ca làm việc, không bố trí nơi lưu động cơ chờ sửa chữa.

Phương án 2: Tổ chức 3 tổ cùng loại và một phòng chứa tối đa 10 động cơ chờ sửa chữa.

Chọn phương án nào để tỷ lệ động cơ không được nhận sửa chữa nhỏ hơn? Biết rằng mỗi ca làm việc có trung bình 12 động cơ đến trạm để sửa chữa.

19. Một hệ thống kho xăng có 3 máy cấp xăng cho các xà lan trung chuyển, để cấp đủ cho một xà lan mỗi máy cần 8 giờ, trung bình một ngày đêm có hai xà lan đến lấy xăng.

a. Hãy tính các chỉ tiêu đánh giá hoạt động cấp xăng của kho trong hai chế độ khác nhau:

1) Các máy hoạt động độc lập.

2) Các máy kết hợp cấp xăng khi số xà lan cần cấp nhỏ hơn số máy.

b. Nếu lấy chỉ tiêu tỷ lệ xà lan được cấp ngay làm chỉ tiêu hiệu quả thì nên chọn cách nào trong các cách sau:

- Một trong hai cách trên với chế độ từ chối cổ điển.

- Một trong hai cách trên với số chỗ chờ tối đa cho 4 xà lan.

20. Một hệ thống phục vụ công cộng Poát xông có 4 kênh phục vụ, năng suất mỗi kênh là 5 yêu cầu/giờ. Dòng vào trung bình 16 yêu cầu/giờ.

a. Hãy cho biết trong hai cách tổ chức phục vụ sau đây, cách nào có tỷ lệ yêu cầu đến hệ thống được phục vụ ngay lớn hơn.

Cách 1: Phục vụ như một hệ từ chối cổ điển.

Cách 2: Phục vụ như một hệ chờ với số chỗ chờ tối đa là 4.

b. Có thể tổng quát hoá câu a như thế nào và kết luận là gì?

Chương V
MÔ HÌNH QUẢN LÝ DỰ TRỮ

I. BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN DỰ TRỮ VÀ CÁC KHÁI NIỆM

Trong hầu hết các hoạt động kinh tế - xã hội người ta phải giải quyết bài toán dự trữ, thực chất là bài toán lựa chọn *phương án dự trữ các nguồn lực sao cho chi phí ít tốn kém nhất*. Trong chương này ta xét một lớp bài toán cụ thể giải quyết các mối quan hệ kinh tế trong quá trình dự trữ. Việc thể hiện bài toán dưới dạng mô hình cho phép mở rộng khả năng ứng dụng trong những tình huống tương tự, hoặc khi có thể qui vấn đề cần giải quyết về dạng bài toán dự trữ.

Mô hình điều khiển dự trữ như tên gọi ban đầu của mô hình này, xuất phát từ bài toán quản lý một hệ thống kho. Tuy nhiên trong thực tế, mô hình này không chỉ được sử dụng để phân tích, điều khiển dự trữ mà còn được dùng như một công cụ *mô hình hoá* nhiều vấn đề trong các lĩnh vực *quản lý sản xuất, kinh doanh và dịch vụ*. Các đối tượng được mô hình hoá cũng theo đó mà ngày càng phức tạp hơn. Với một số mô hình được giới thiệu sau đây chúng ta sẽ lần lượt nghiên cứu từ các *mô hình đơn giản, với các yếu tố tất định, diễn biến đều đặn* đến các mô hình trong đó các yếu tố có tính *ngẫu nhiên*. Mặt khác, ta sẽ nghiên cứu từ các *mô hình thuần tuý dự trữ* đến các mô hình *sản xuất kinh doanh*. Để nghiên cứu những mô hình phức tạp, chúng ta cần đến các

b. Chi phí **đặt hàng** là chi phí cố định cho 1 lần đặt hàng bao gồm chi phí dao dịch, chi phí cho các nghiệp vụ khác.

c. Chi phí **dự trữ** hay chi phí kho: Chi phí dự trữ có thể cấu thành bởi các loại chi phí sau đây:

- Chi phí bảo quản tính trên mỗi đơn vị hàng trong một đơn vị thời gian.

- Chi phí kho tính cho mỗi đơn vị hàng, loại chi phí này càng cao khi dự trữ càng ít nó được tính bằng chi phí cố định cho hoạt động của hệ thống kho chia cho số đơn vị hàng dự trữ trong kho.

- Chi phí tồn đọng vốn tính trên giá trị hàng hoá dự trữ, chi phí này có thể tính theo tỷ lệ lãi của tiền gửi.

Trong các bài toán cổ điển thông thường chi phí dự trữ được tính tỷ lệ với giá hàng qua 1 hệ số gọi là *hệ số chi phí dự trữ (hay hệ số bảo quản).* Cách tính như vậy có thể chỉ bao gồm bộ phận thứ hai của chi phí thực tế.

d. **Chi phí do không đảm bảo nhu cầu:** Là thiệt hại khi thiếu 1 đơn vị hàng trong 1 đơn vị thời gian.

e. Chi phí do dư thừa hàng (so với nhu cầu thực tế): Khoản chi phí phát sinh khi chúng ta dự trữ quá mức cần thiết.Thí dụ: Tổn thất do vốn bị ứ đọng, do hàng bị hư hỏng,...

Trong các bài toán thực tế chi phí dự trữ có thể hình thành rất khác nhau và xác định chính xác chi phí này đôi khi là một bài toán khác.

Ngoài ra, có nhiều bài toán được mô tả như bài toán dự trữ một cách hình thức. Trong trường hợp đó phát sinh các yếu tố khác cùng các loại chi phí tương ứng. Để mô tả chúng,

cũng như xây dựng mô hình tương ứng người ta cần có những phân tích cá biệt để nhận được mô hình dễ ứng dụng nhất nếu có thể.

Có nhiều cách thức phân lớp mô hình dự trữ:

- Theo tính chất của dự trữ và tiêu thụ người ta chia thành hai loại: Mô hình với các yếu tố tất định hay còn gọi là mô hình tất định và mô hình với ít nhất một trong các yếu tố ngẫu nhiên gọi là mô hình ngẫu nhiên.

- Theo tính chất thường xuyên của quá trình dự trữ, người ta chia thành các mô hình dự trữ thường xuyên và các mô hình dự trữ theo giai đoạn.

- Theo điều kiện của nguồn kinh phí, khả năng dự trữ,... người ta chia thành các mô hình dự trữ có ràng buộc và không ràng buộc.

Trong chương này, chúng ta chỉ nghiên cứu một số mô hình dự trữ cơ bản mà việc phân tích không đòi hỏi quá nhiều công cụ toán học. Tuy nhiên, không vì thế mà khả năng ứng dụng của những mô hình này bị hạn chế. Cách thức giải quyết các bài toán có thể mở rộng cho lớp các mô hình phức tạp hơn trong thực hành tổ chức và điều khiển tác nghiệp.

II. MỘT SỐ MÔ HÌNH DỰ TRỮ TẤT ĐỊNH

Trong số các bài toán điều khiển dự trữ, bài toán trong đó các yếu tố cơ bản đã được *xác định* là bài toán đơn giản nhất. Về phương pháp giải cũng không đòi hỏi các công cụ phức tạp. Để bước đầu làm quen với việc nghiên cứu các mô hình dự trữ nói chung, trước tiên ta xem xét một số mô hình đơn giản, đó là các mô hình tất định (phí ngẫu nhiên).

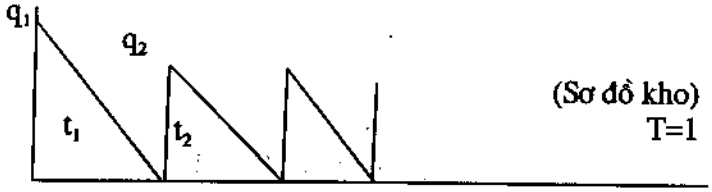
1. Mô hình dự trữ với việc tiêu thụ đều, bổ sung tức thời (mô hình WILSON)

a. Mô tả bài toán

Giả sử nhu cầu một loại hàng trong thời kỳ T (T = 1) là Q đơn vị. Việc tiêu thụ hàng là đều đặn và thời gian bổ sung hàng vào kho không đáng kể (tức thời). Chi phí cho mỗi lần đặt hàng là A, giá đơn vị hàng là C, hệ số chi phí dự trữ là I, thời gian đặt hàng là T_0. Hãy xác định số lần đặt hàng và lượng hàng đặt mỗi lần sao cho tổng chi phí bé nhất.

b. Thiết lập và phân tích mô hình

Giả sử ta chia T thành n kỳ dự trữ và tiêu thụ, trong mỗi ký i đặt mua lượng hàng tương ứng là q_i. Ta có sơ đồ biểu thị số lượng hàng trong kho như sau:



Sơ đồ trên thể hiện cường độ tiêu thụ đều, đường biểu diễn lượng dự trữ tuyến tính theo thời gian. Mỗi chu kỳ nhập một lượng hàng q_i, tiêu thụ đến hết chu kỳ thì phải có hàng bổ sung vào dự trữ. Như vậy không xảy ra thiếu, thừa dự trữ do đó cũng không phát sinh các chi phí tương ứng.

Trong mỗi chu kỳ t_i lượng hàng dự trữ trung bình là $q_i/2$ phát sinh chi phí dự trữ tương ứng $q_it_iIC/2$; chi phí đặt hàng là nA; ngoài ra tổng số tiền mua hàng là CQ.

Vậy hàm tổng chi phí là:

$$F(t_i, n) = nA + \sum_{i=1}^{n} \frac{ICt_iq_i}{2} + CQ \qquad (1)$$

Vì qui luật tiêu thụ đều nên dễ dàng suy ra: $t_i = q_i/Q$ với $\forall i$. Như vậy ta có:

$$F(q_i, n) = nA + \sum_{i=1}^{n} \frac{ICq_i^2}{2Q} + CQ \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = Q$$

Với n xác định, ta có thể thấy F(q) bé nhất khi: $q_i \equiv q = Q/n$ với $\forall i$, tức là lượng đặt mua mỗi lần đều bằng q.

Thật vậy, lập hàm $f(q_i) = F(q_i) - \lambda(\Sigma q_i - Q)$ điểm dừng của $f(q_i)$ là $q_i = Q/n$. Dễ dàng nhận thấy đây là điểm cực tiểu toàn bộ của $f(q_i)$.

Tóm lại, việc tìm cực tiểu hàm $F(t_i, n)$ qui về tìm cực tiểu hàm:

$F(q) = AQ/q + ICq/2 + CQ$. Vì CQ không đổi ta chỉ cần tìm q làm cực tiểu hàm: $D(q) = \frac{AQ}{q} + \frac{ICq}{2}$ (3)

c. Lời giải

Vì D(q) là tổng của hai số hạng dương có tích không đổi (AQIC/2), theo hệ quả của bất đẳng thức Cô si, D(q) nhỏ nhất khi $AQ/q = ICq/2$. Giải phương trình này đối với q, ta có:

Lượng hàng đặt tối ưu mỗi lần: $q^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC}}$ (4)

và: $D(q^*) = \sqrt{2AQIC} = 2AQ/q^* = ICq^*$ (5)

$\Rightarrow F(q^*) = \sqrt{2AQIC} + CQ$ (6)

hay có thể tính: $F(q^*) = CQ + 2AQ/q^* = ICq^* + CQ$ (7)

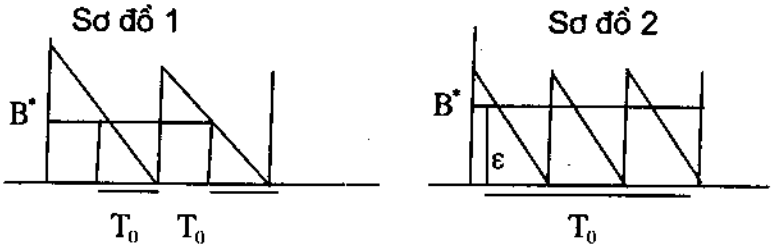
Số lần đặt hàng tối ưu $n^* = Q/q^*$.

Chu kỳ dự trữ, tiêu thụ: $t^* = 1/n^*$.

Điểm đặt hàng: Việc xác định điểm đặt hàng sẽ đơn giản nếu như thời gian đặt hàng $T_0 < t^*$, nhưng trong thực tế có thể $T_0 \geq t^*$, như vậy cần đặt hàng trước một hay một số chu kỳ. Lượng hàng trong kho lúc cần đặt hàng (điểm đặt hàng) chính là lượng hàng tiêu thụ trong khoảng thời gian được xác định theo công thức sau:

$$[T_0 - t^*.\text{int}(T_0/t^*)]$$

Ta quan sát hai sơ đồ kho sau:



$B^* = T_0Q$

$B^* = (T_0 - 2t^*)Q$

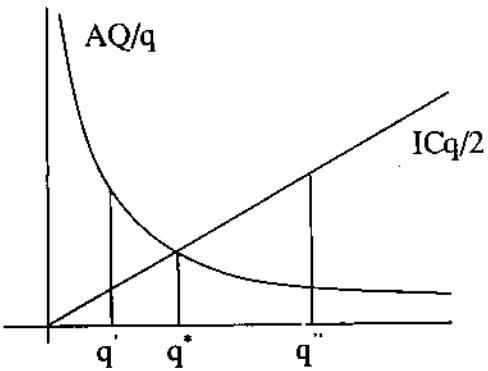
Trong sơ đồ 1 điểm đặt hàng được tính bằng lượng hàng tiêu thu trong thời gian đặt hàng T_0.

Trong sơ đồ 2 cần đặt hàng trước đó hai chu kỳ, vì vậy điểm đặt hàng B^* tính bằng lượng tiêu thụ trong khoảng thời gian bằng phần dư của T_0 sau khi trừ đi 2 lần t^*, tức là: $\varepsilon = T_0 - 2t^*$.

Trong trường hợp tổng quát ta có thể tính điểm đặt hàng B* theo công thức sau:

$B^* = Q[T_0 - t^*.int(T_0/t^*)$ là phần nguyên của T_0/t^*.

Ta có thể mô tả hàm D(q) và lời giải trên đồ thị như sau:



ta thấy q^* là hoành độ điểm giao của hai đồ thị AQ/q và lCq/2 và:

$$AQ/q > ICq/2 \text{ với } q < q^*$$
$$AQ/q < ICq/2 \text{ với } q > q^*.$$

d. Phân tích kết quả

Với kết quả trên ta có thể có một số phân tích sơ bộ sau đây:

+ Điểm q^* trên đồ thị cho thấy rằng nếu ta đang thực hiện một chiến lược dự trữ nào đó mà chi phí đặt hàng (hay chi phí cố định) quá cao so với chi phí dự trữ (q' chẳng hạn) thì cần tăng khối lượng hàng đặt mỗi lần, ngược lại, nếu ở tình trạng q'' thì cần giảm khối lượng hàng đặt mỗi lần.

+ Công thức tính q^* giúp ta xác định qui mô kho cần thiết tại điểm dự trữ tối ưu.

+ Công thức tính $F(q^*)$ cho phép xác định lượng vốn cần thiết cho chu kỳ dự trữ và tiêu thụ:

$$K^* = \frac{F(q^*)}{n^*} = \frac{(\sqrt{2AQIC} + CQ)}{Q}\sqrt{\frac{2AQ}{IC}} = 2A + C\sqrt{\frac{2AQ}{IC}}.$$

+ Sự thay đổi một vài yếu tố (phân tích tĩnh)

Các tham số cơ bản trong mô hình có thể ngoại sinh hoá như các biến. Với sự thay đổi của các biến này chiến lược dự trữ tối ưu cũng có những thay đổi nhất định. Tuy nhiên, trong thực tế cần chú ý rằng không phải mọi tham số đều có thể ngoại sinh hoá, mặc dù về mặt toán học chúng ta luôn có khả năng ngoại sinh hoá tất cả các tham số. Người ta chỉ xét sự thay đổi của những tham số thay đổi điều kiện dự trữ thông thường nhất.

- Trước tiên ta xét sự thay đổi tổng nhu cầu Q tác động đến qui mô kho và vốn:

Nếu $Q' = \alpha Q$ $(\alpha > 0)$ thì: $q'^* = \sqrt{\frac{2A\alpha Q}{IC}} = q^*\sqrt{\alpha}$

Như vậy qui mô kho cần thiết không tỷ lệ với Q, mà thay đổi với hệ số căn bậc hai.

Tổng quát, từ công thức (4) ta thấy tại điểm tối ưu $q^* = q(A, Q, I, C)$ và dễ dàng thấy hàm q khả vi theo tất cả các biến (với các biến nhận giá trị dương).

Vậy:

$$dq = \frac{1}{\sqrt{2AICQ}}(QdA - \frac{AQ}{C}dC - \frac{AQ}{I}dI + AdQ) \qquad (8)$$

Công thức này cho phép xác định biến động của q^* (có thể xem là qui mô kho) theo các yếu tố trong mô hình.

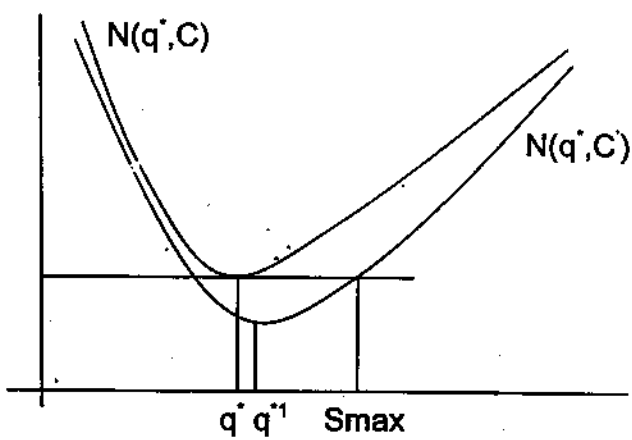
Tương tự trong trường hợp đơn giản khi nhu cầu tăng ta có:

$$\text{Vốn } K^{**} = 2A + C\sqrt{\frac{2A\alpha Q}{IC}} = 2A + C\sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{2AQ}{IC}}.$$

- Sự thay đổi của giá hàng: Trong trường hợp chủ hàng đặt mốc qui mô lô hàng mua để hạ giá nhằm khuyến mại, hành vi dự trữ sẽ thay đổi như thế nào?

Giả sử có mốc q_0 với $q \geq q_0$ thì giá hàng hạ ε, $(0 < \varepsilon < 1)$; tức là $c' = c(1 - \varepsilon)$.

Ta có đồ thị sau:



+ Khi $q_0 > q^*$

Nếu $q_0\sqrt{1-\varepsilon} \leq q^*$ thì đặt hàng với khối lượng: $q^* = \frac{q^*}{\sqrt{1-\varepsilon}}$ (*)

Trong trường hợp ngược lại, cần so sánh $F(q^*)$ và $F(q_0)$ để xác định lượng hàng đặt mua tối ưu.

+ Khi $q_0 \leq q^*$ cần thay đổi chiến lược đặt hàng để nhận được ưu đãi, khuyến mại, điểm tối ưu có thể tính theo công thức (*).

Tổng quát, ta có thể mô tả sự biến đổi của $K^* = K(A,Q,I,C)$ nhờ biểu thức sau:

$$dK = (2 + \frac{QC}{\sqrt{2AQIC}})dA + \frac{AC}{\sqrt{2AQIC}}dQ + \frac{QA}{\sqrt{2AQIC}}dC - \frac{\sqrt{2AQIC}}{I^2}dI.$$

+ Vấn đề xác định chi phí dự trữ và lời giải của bài toán:

Chúng ta thấy chi phí dự trữ xác định trong mô hình cổ điển của Wilson có thể thiếu tính thực tế. Vậy sự thay đổi nào trong cách xác định chi phí này dẫn đến lời giải trong bài toán cơ bản không còn áp dụng được. Có thể thấy rằng mọi cách tính chi phí dự trữ được đơn vị hoá theo mỗi đơn vị hàng đều có chung lời giải theo công thức:

$$q^* = \sqrt{\frac{2AQ}{C_0}} \qquad (4')$$

trong đó C_0 là chi phí dự trữ tính cho mỗi đơn vị hàng được dự trữ trong một đơn vị thời gian. Chẳng hạn, chi phí dự trữ bao gồm hai phần: Chi phí cố định cho mỗi đơn vị hàng và chi phí do ứ đọng vốn tính theo giá hàng với hệ số là tỷ lệ lãi tiền gửi hay tiền vay.

Trường hợp chi phí dự trữ còn bao gồm một bộ phận phụ thuộc tổng nhu cầu Q thì công thức trên không áp dụng được. Tuy vậy, trong các trường hợp cụ thể chúng ta có thể lợi dụng cách mô hình hoá tương tự như trên để tìm lời giải cụ thể.

e. Thí dụ

Thí dụ 5.1: Một cửa hàng kinh doanh thép xây dựng tại một khu vực có tổng nhu cầu 200000 tấn/năm, việc tiêu thụ là đều đặn trong năm, thời gian nhập hàng không đáng kể. Cửa hàng mua thép từ một nguồn không hạn chế về số lượng. Chi phí cho một lần đặt là 400$, giá của một tấn là 240$, hệ số chi phí bảo quản là 0,05. Thời gian từ lúc đặt hàng đến khi có hàng vào kho là 2 tháng. Xác định các chỉ số cơ bản trong dự trữ và tiêu thụ của cửa hàng.

Giải:

Tóm tắt các dữ kiện của bài toán như sau:

Tổng nhu cầu: Q =	200000
Chi phí đặt hàng: A =	400
Giá hàng: C =	240
Hệ số chi phí dự trữ: I=	0,05
Thời gian đặt hàng: T =	0,164384 (năm)
Tính theo ngày: =	60

Sử dụng các công thức trên ta có:

Lượng hàng đặt mỗi lần sẽ là: q^* = 3651,483

Tổng chi phí bé nhất là: $F(q^*)$ = 48043817,8

Thời gian 1 chu kỳ là: t^* = 0,0182

Số chu kỳ trong 1 năm là: n^* = 54,772

Điểm đặt hàng: B^* = 13,359

Thí dụ 5.2: (Mô hình **Baumol - Tobin** và công thức **căn bậc hai)**

Giả sử 1 người có một khoản tiền mặt V = 50000$ để chi tiêu trong 1 năm. Người đó có thể giữ một lượng tiền mặt

nhất định, phần còn lại đem mua trái khoán, tiền mặt có lợi tức bằng không còn trái khoán có lợi tức I = 0,01. Mỗi lần mua, bán trái khoán cần bỏ ra một khoản chi phí A = 20$. Hãy xác định lượng tiền mặt người đó giữ mỗi kỳ sao cho có lợi nhất, nếu việc chi tiêu là đều đặn.

Giải:

Giả sử người đó chia một năm thành n kỳ giữ tiền mặt, mỗi kỳ lượng tiền mặt nhận từ bán trái khoán là C. Như vậy, chi phí cơ hội là IC/2, còn chi phí cho n lần giao dịch mua bán trái khoán là nA hay AV/C. bài toán trên dẫn đến bài toán dự trữ với hàm tổng chi phí là: N(C) = AV/C + IC/2.

Dễ dạng nhận được lời giải theo công thức của mô hình Wilson.

Ta có: $C^* = \sqrt{\frac{2AV}{I}} = 14142\$$

Với bài toán này người ta có thể tính toán lượng tiền phát hành cần thiết để đảm bảo quá trình lưu thông tiền tệ với tổng lượng lưu thông của một quốc gia đã được dự báo.

2. Một số mô hình mở rộng từ mô hình Wilson

Trong phần này ta sẽ mở rộng mô hình Wilson đối với một số tình huống thường gặp và chỉ ra lời giải cũng như sự thay đổi của lời giải theo một số yếu tố được xem là quan trong nhất trong từng mô hình.

a. Bài toán chọn nguồn

Giả sử nhu cầu thường xuyên một loại hàng là Q đơn vị/năm. Có thể thoả mãn nhu cầu này từ hai nguồn, nguồn I với chi phí đặt hàng A_1 và giá hàng về đến kho C_1; nguồn II

với chi phí đặt hàng A_2 và giá hàng về đến kho C_2. Chi phí dự trữ tính theo hiện vật C_0 cho mỗi đơn vị dự trữ/năm. Xác định chiến lược dự trữ, tiêu thu tối ưu trong điều kiện:

1. Không cần xem xét các yếu tố khác liên quan đến quá trình dự trữ và tiêu thu.

2. Nguồn I là sản phẩm của chính cơ sở dự trữ tiêu thụ với khả năng cung cấp S đơn vị/năm ($S < Q$), nguồn II là nguồn mua ngoài. Nếu ngừng sản xuất thì toàn bộ thiệt hại phải chịu mỗi năm là F_0. Ngược lại, nếu chi phí thoả mãn nhu cầu ở mức S thì "thiệt hại" ước tính là $\alpha (Q - S)$. Biết giá hàng bán ra là P.

Thiết lập mo hình và lời giải

Trường hợp 1: Giả sử chúng ta đưa ra chiến lược trên cơ sở phân chia nguồn thành hai phần S và $(Q - S)$ tương ứng với các nguồn I và II. Ta sẽ chứng tỏ rằng chiến lược tối ưu chỉ có thể là một trong hai cách chọn $S = Q$ hoặc $S = 0$, tức là mua hàng chỉ ở một nguồn.

Thật vậy: Tổng chi phí nguồn I khi đảm bảo S đơn vị hàng là:

$$F_1(q_1, S) = \frac{SA_1}{q_1} + C_0 \frac{q_1}{2} \frac{S}{Q} + C_1 S$$

Giá trị cực tiểu hàm chi phí là:

$$F_1(q_1^*) = \frac{S}{Q}\sqrt{2A_1QC_{01}} + C_1S$$

Tương tự, tổng chi phí từ nguồn II cực tiểu là:

$$F_2(q_2^*) = \frac{Q-S}{Q}\sqrt{2A_2QC_{02}} + C_2(Q-S)$$

trong đó $C_{01} = C_1 I$ và $C_{02} = C_2 I$.

Tổng chi phí nhỏ nhất:

$$F = \frac{S}{Q}\sqrt{2A_1QC_{01}} + C_1S + \frac{Q-S}{Q}\sqrt{2A_2QC_{02}} + C_2(Q-S)$$

$$\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{1}{Q}[\sqrt{2A_1QC_{01}} - \sqrt{2A_2QC_{02}}] + (C_1 - C_2)$$

Hàm tổng chi phí là một hàm đơn điệu theo S vì dấu của $\frac{\partial F}{\partial S}$ *không phụ thuộc S.*

Như vậy tổng chi phí sẽ cực tiểu tại một trong 2 điểm hoặc $S = 0$ nếu $F'(S) > 0$ hoặc $S = Q$ nếu $F'(S) < 0$.

Kết luận này cho phép lựa chọn một nguồn theo cách so sánh trực tiếp hai trị số sau:

$$F_1(Q) = \sqrt{2A_1QC_{01}} + C_1Q \text{ và } F_2(Q) = \sqrt{2A_2QC_{02}} + C_2Q$$

Ngoài ra kết luận này còn cho phép phân chia nguồn nếu một nguồn hạn chế khối lượng cung.

Trong các bài toán thực tế, chi phí dự trữ có thể được tính theo các cách khác nhau lúc đó C_0 có thể thay thế bằng các đại lượng tương ứng. Các phân tích trên không phụ thuộc cách tính chi phí dự trữ nên có thể áp dụng cho các bài toán với cách tính chi phí dự trữ theo mỗi đơn vị hàng.

Thí dụ 5. 3: Một cơ sở kinh doanh một loại hàng với nhu cầu 4500 đơn vị/năm. Việc tiêu thụ là đều đặn, hai nguồn hàng có thể là:

Nguồn I: Chi phí đặt hàng $A_1 = 2,5$ triệu/lần, giá hàng $C_1 = 0,12$ triệu/đơn vị.

Nguồn II: Chi phí đặt hàng $A_2 = 3$ triệu/lần và giá hàng $C_2 = 0,11$ triệu/đơn vị.

Chi phí dự trữ tính theo giá hàng với hệ số I = 0,05.

Để xác định nguồn mua và số lượng mua, trước tiên ta so sánh hai trị số:

$$F_1(Q) = \sqrt{2A_1QC_{01}} + C_1Q \text{ và } F_2(Q) = \sqrt{2A_2QC_{02}} + C_2Q$$

trong đó $C_{01} = C_1I$ và $C_{02} = C_2I$.

Ta có:

$$F_1(Q) = \sqrt{2A_1QC_{01}} + C_1Q = 551,619$$

$$F_2(Q) = \sqrt{2A_2QC_{02}} + C_2Q = 507,168$$

Vậy chọn nguồn II với lượng hàng đặt mỗi lần là q^* = 2215,65 đơn vị.

Trường hợp 2: Với những kết quả phân tích ở trên chúng ta có thể thấy việc lựa chọn chiến lược sản xuất, tiêu thụ dựa trên hàm tổng lợi nhuận qua việc so sánh các giá trị sau:

+ Lợi nhuận tối đa trong trường hợp mua ngoài:

$$\pi_2(Q) = PQ - (F_0 + \sqrt{2A_2QC_{02}} + C_2Q) \quad (10)$$

+ Lợi nhuận tối đa khi tự cung cấp S và mua ngoài (Q – S):

$$\pi_2(Q) = PQ - [\frac{S}{Q}\sqrt{2A_1QC_{01}} + C_1S) + \frac{Q-S}{Q}\sqrt{2A_2QC_{02}} + C_2(Q-S)] \quad (11)$$

+ Lợi nhuận tối đa khi chỉ thoả mãn nhu cầu bằng nguồn tự sản suất:

$$\pi_1(Q) = PS - (\frac{S}{Q}\sqrt{2A_1QC_{01}} + C_1S + \alpha(Q-S)) \quad (12)$$

Nếu việc thoả mãn nhu cầu là bắt buộc thì việc tìm lời giải của bài toán không xét đến (12) và giá bán không có ý nghĩa trong quá trình giải bài toán.

b. Bài toán với giá vốn

Chi phí dự trữ trong các công thức (10) – (12) có thể thay đổi theo từng tình huống cụ thể. Hàm chi phí cũng thay đổi đặt biệt là khi chúng ta quan tâm đến vấn đề ứ đọng vốn hay giá vốn. Giá vốn thường được xác định bằng lãi suất ngân hàng (lãi suất tiền gửi hoặc tiền vay).

Trước tiên ta xét bài toán cổ điển Wilson. Trong khi thiết lập mô hình chúng ta đã bỏ qua giá vốn, một yếu tố thường trực trong mọi bài toán kinh doanh. Giả sử giá vốn đo bằng lãi suất danh nghĩa hàng năm là r không đổi. Hàm chi phí có xét đến giá vốn r có thể mô tả như sau:

$$F(q) = Ar + A\frac{Q}{q} + C_0\frac{q}{2} + r\frac{Cq}{2} + CQ \qquad (13)$$

Với C_0 là chi phí dự trữ tính cho một đơn vị hàng trong thời gian T = 1 (năm): Hàm chi phí trên giả thiết rằng mọi chi phí được hoàn trả sau mỗi chu kỳ dự trữ - tiêu thụ vì vậy giá vốn r chỉ liên quan đến tiền đặt hàng mỗi kỳ và lượng hàng dự trữ trung bình trong kho tại 1 kỳ.Cực tiểu hàm (13) qui về tìm cực tiểu:

$$D(q) = A\frac{Q}{q} + \frac{q}{2}(C_0 + rC)$$

Lời giải đơn giản là:

$$q^* = \sqrt{\frac{2AQ}{C_0 + rC}} \qquad (14)$$

$$D(q^*) = \sqrt{2AQ(C_0 + rC)}$$

$$F(q) = \sqrt{2AQ(C_0 + rC)} + Ar + CQ \qquad (15)$$

Thí dụ 5.4: Một nhà máy sản xuất xi măng có tổng nhu cầu Clinke mỗi năm là 40000 tấn. Nhà máy có thể nhập khẩu Clinke theo từng hợp đồng với giá 500 nghìn đồng/tấn, với chi phí hoàn tất hợp đồng mỗi lần là 2 triệu đồng, chi phí bảo quản là 20 nghìn cho mỗi tấn/năm. Hãy lựa chọn phương án cung cấp Clinke cho nhà máy nếu lãi suất vay ngân hàng 3%/năm.

Giải:

Ta có A = 2000; Q = 40000; C_0 = 20; r = 0,03; C = 500.

Theo (14) ta có: $q^* = \sqrt{\frac{2AQ}{C_0 + rC}} = 2138,09$ (tấn).

Tổng chi phí thấp nhất là:

$$F(q) = \sqrt{2AQ(C_0 + rC)} + Ar + CQ$$

$$= [2*2000 * 40000 *(20+0,03*500)]^{1/2}$$

$$+ 2000*0,03 + 500*40000 = 20074893 \text{ (nghìn đồng).}$$

c. Bài toán thuê kho

Giả sử một hệ thống dự trữ (của một cơ sở) có dung lượng kho cố định q^0. Mỗi đơn vị hàng ở đầu chu kỳ dự trữ vượt quá q^0 phát sinh một chi phí thuê kho với tỷ lệ k (k > 0). Với tất cả các dữ kiện của mô hình Wilson ta có thể lập hàm chi phí theo lượng hàng đặt mỗi lần q như sau:

$$N(q) = \begin{cases} N_1 = \frac{AQ}{q} + IC\frac{q}{2} + CQ & \text{khi } q \le q^0 \\ N_2 = \frac{AQ}{q} + IC\frac{q^0}{2} + (I+k)C\frac{q - q^0}{2} + CQ & \text{khi } q > q^0 \end{cases}$$

Giải bài toán này, cùng với lời giải thông thường ta cần trả lời hai vấn đề:

- Có cần thuê kho hay không?
- Nếu có thì thuê kho như thế nào?

Các bước giải:

Bước 1: Giải bài toán với hàm chi phí N_1 trên miền $q > 0$. Nghiệm của bài toán là $q_1^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC}}$. Nếu giá trị này không vượt quá q^0 ta có lời giải của bài toán $q^* = q^*_1$ và câu trả lời kèm theo là không cần thuê kho.

Bước 2: Nếu lời giải của bước 1 là $q_1^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC}} > q^0$, ta tìm cực trị của N_2 trên miền $q > 0$.

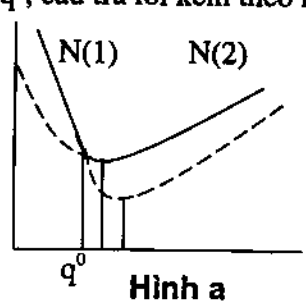
Điểm cực trị là $q_2^* = \sqrt{\frac{2AQ}{(I+k)C}}$.

Chú ý là $q_1^* > q_2^*$ vì vậy ta cần xem xét quan hệ của điểm cực trị này so với q^0.

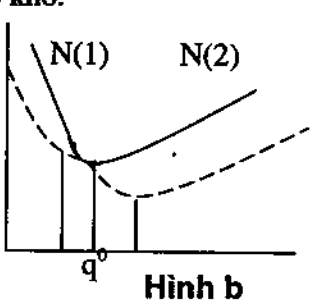
Hãy quan sát các đồ thị sau:

Hình a mô tả trường hợp $q_2^* > q^0$ lời giải của bài toán là $q^* = q_2^*$, câu trả lời kèm theo là thuê kho có dung tích $v = q_2^* - q^0$.

Hình b mô tả trường hợp $q_2^* < q^0$ lời giải của bài toán là $q^* = q^0$, câu trả lời kèm theo là không thuê kho.



Hình a



Hình b

d. Bài toán bố trí khoang chở hàng hay bài toán tổ chức xếp dỡ

Một bài toán tổ chức sản xuất dẫn đến bài toán dự trữ nêu trên như sau: Một tàu hàng có tổng dung tích hiệu dụng là Q, người ta có thể phân chia dung tích này thành một số khoang hàng trong mỗi lần chở. Việc thiết kế mỗi khoang hàng có một chi phí cố định A. Việc xếp dỡ hàng có thể làm đồng thời ở các khoang với chi phí cố định cho mỗi đơn vị dung tích là C. Thời gian xếp dỡ tỷ lệ nghịch với số khoang hàng chi phí lưu bến cố định theo thời gian là C_1. Cần phân chia tổng dung tích thành các khoang sao cho chi phí phát sinh từ các yếu tố trên nhỏ nhất. Thực chất bài toán này là một bài toán tổ chức sản xuất nó không mang tính chất của một quá trình dự trữ, nhưng do những đặt điểm nhất định người ta có thể mô tả bài toán như một bài toán dự trữ và việt tìm lời giải hoàn toàn tương tự như bài toán Wilson.

Giả sử ta chia n khoang với dung tích q như nhau. Tổng chi phí được xác định như sau:

$$F(n,q) = nA + CQ + \frac{T}{n}C_1 = \frac{AQ}{q} + \frac{C_1 q}{Q}T + CQ$$

Ta có thể xác định bằng thời gian xếp dỡ hàng nếu tàu chỉ có 1 khoang, vì vậy có thể qui đổi để nhận được T = 1.

Hàm tổng chi phí có dạng:

$$F(n,q) = \frac{AQ}{q} + \frac{C_1 q}{Q} + CQ$$

Dung tích tối ưu của mỗi khoang xác định theo công thức sau:

$$q^* = Q\sqrt{\frac{A}{C_1}} \qquad (16)$$

Trên đây là một số bài toán có thể mô hình hoá thành mô hình Wilson với một vài điều chỉnh nhỏ. Điểm chung của lớp mô hình này là cách mô hình hoá và cách tìm lời giải. Các công thức xác định lời giải tương đối đơn giản. Tuy nhiên, tính chất phức tạp lại thể hiện ở việc phân tích các yếu tố và cách thức trừu tượng hoá, hình thức hoá để có được mô hình đơn giản nhất có thể, trên cơ sở đó lợi dụng lời giải cổ điển trong mô hình Wilson để tìm lời giải cho từng bài toán cụ thể.

3. Mô hình dự trữ tiêu thụ đều, bổ sung dần dần

Một trong những tình huống khá phổ biến trong thực tế xác suất và kinh doanh là việc bổ sung hàng không tức thời, người ta có thể vừa sản xuất vừa tiêu thụ hay vừa nhập hàng vừa tiêu thụ. Trường hợp được xét sau đây được giả thiết là việc cung cấp hàng đều đặn. Rõ ràng là nếu cường độ cung cấp bằng cường độ tiêu thụ thì sẽ không có dự trữ, vì vậy ta chỉ xét trường hợp cường độ cung cấp lớn hơn đáng kể so với cường độ tiêu thụ.

a. Mô tả bài toán

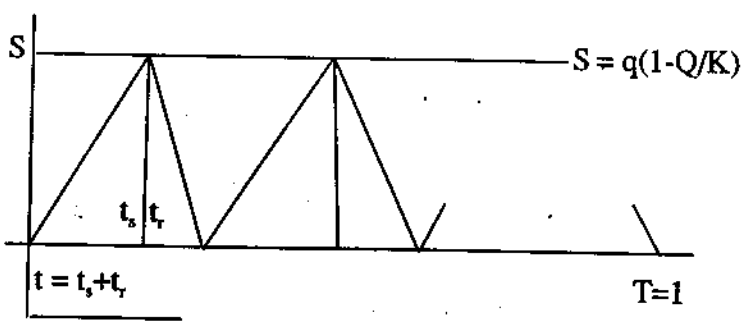
Giả sử nhu cầu một loại hàng trong thời kỳ T (T = 1) là Q đơn vị. Việc tiêu thụ hàng là đều đặn và thời gian bổ sung hàng vào kho được tiến hành với cường độ không đổi K đơn vị trong thời gian T = 1. Ta giả thiết rằng K >> Q vì nếu K ≤ Q thì không cần đặt vấn đề dự trữ. Chi phí cho mỗi lần đặt hàng là A, giá đơn vị hàng là C, hệ số chi phí dự trữ là I, thời gian đặt hàng là T_0. Hãy xác định số lần đặt hàng và lượng hàng đặt mỗi lần sao cho tổng chi phí bé nhất.

b. Thiết lập mô hình

Tương tự như mô hình trên, ta có thể xem số lượng hàng đặt mỗi lần bằng nhau và bằng q, số lần đặt hàng sẽ là $n = Q/q$. Vì $Q << K$ nên trong mỗi chu kỳ dự trữ, tiêu thụ t, có hai khoảng thời gian t_s - thời gian có bổ sung hàng vào kho; t_r – thời gian chỉ tiến hành tiêu thụ.

Nếu gọi lượng hàng tối đa trong kho là S, ta có trong thời gian T = 1 nếu nhập hàng liên tục thì lượng hàng dư là K– Q; trong thời gian t_s lượng hàng dư là S, vậy: $S/t_s = (K–Q)/T$ hay $S = t_s(K – Q)$.

Mặt khác trong thời gian t_s lượng hàng nhập được là q, nên $q/t_s = K/T$ hay $t_s = q/K$. Từ đó ta có: $S = q(K – Q)/K = q(1 – Q/K)$ và có sơ đồ biểu thị số lượng hàng dự trữ trong kho như sau:



Hàm tổng chi phí là:

$$F(q) = \frac{AQ}{q} + IC\frac{q}{2}(1 - \frac{Q}{K}) + CQ \qquad (1)$$

(Mức dự trữ trung bình được tính bằng S/2 và $S = q(1 – Q/K)$)

Nếu đặt $I' = I(1 – Q/K)$ ta có hàm chi phí của mô hình Wilson trong đó I thay bằng I' và dễ dàng có lời giải tương tự.

c. Lời giải

Lượng hàng đặt tối ưu mỗi lần: $q^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC(1-\frac{Q}{K})}}$ (2)

và: $D(q^*) = \sqrt{2AQIC(1-\frac{Q}{K})}$ (3)

$$\Rightarrow F(q^*) = \sqrt{2AQIC(1-\frac{Q}{K})} + CQ \quad (4)$$

Số lần đặt hàng tối ưu: $n^* = Q/q^*$

Chu kỳ dự trữ - tiêu thụ: $t^* = 1/n^*$.

Điểm đặt hàng trong trường hợp này cần phân biệt mức B^* khi đang làm đầy kho và khi đang làm vơi kho.

Trước tiên ta tính: $B = Q[T_0 - t^*.int(T_0/t^*)]$.

Nếu $B \leq S^* = q^* (1 - Q/K)$ thì $B^* = B$: Đặt hàng khi đang làm vơi kho.

Nếu $B > S^*$ thì $B^* = (K - Q)(t^* - B/Q)$: Đặt hàng khi đang làm đầy kho.

d. Phân tích lời giải

Các phân tích trong mô hình Wilson hoàn toàn có thể sử dụng cho mô hình dự trữ tiêu thụ đều, bổ sung dần dần. Một số bài toán mở rộng có thể ứng dụng được nếu ta có thể tiến hành được phép thay thế hệ số I bởi I' như đã nói ở trên.

Sau đây chúng ta chỉ xét những phân tích riêng có của mô hình này:

+ Xấp xỉ bởi mô hình Wilson và huỷ bỏ dự trữ

Rõ ràng tỷ lệ Q/K là hoàn toàn xác định, vì vậy sự sai khác của lời giải trong mô hình này với mô hình Wilson phụ thuộc vào giá trị Q/K. Nếu Q/K ≈ 0 thì thực chất mô hình trở thành mô hình bổ sung tức thời. Ngược lại khi Q/K ≈ 1 thì coi như không có dự trữ.

Mô hình dự trữ này phù hợp với quá trình tổ chức sản xuất - tiêu thụ hơn là quá trình kinh doanh thương mại Trong đó có thể xem K là năng lực sản xuất một mặt hàng chính, Q là nhu cầu, A là chi phí chuẩn bị 1 đợt sản xuất, C là chi phí trực tiếp cho sản xuất 1 đơn vị hàng, T_0 là thời gian chuẩn bị sản xuất.

+ Bài toán với khối lượng hàng không qua kho

So với mô hình Wlson, tổng chi phí trong mô hình này nhỏ hơn, nguyên nhân là có 1 khối lượng hàng có thể xem là không phải qua kho trong mỗi chu kỳ, do đó giảm được chi phí dự trữ. Có thể xác định số lượng đó tại chiến lược tối ưu như sau:

$$r = (q^* - S^*) = q^* - q^*(1 - Q/K) = q^*Q/K.$$

Với số chu kỳ là Q/q^* và với T = 1 tổng lượng hàng không qua kho là: $R^* = \frac{Q^2}{K}$;

R^* cũng là một chỉ tiêu để đánh giá một khía cạnh của chiến lược dự trữ đang tồn tại. Trong thực tế, R^* không phụ thuộc các chi phí, nó chỉ phụ thuộc K và Q. Vì vậy nếu doanh nghiệp thực hiện một chiến lược dự trữ q, mà lượng hàng không qua kho lớn hơn R^* tức là nhu cầu lớn hơn mức dự báo hoặc khả năng sản xuất giảm, ngược lại khi lượng hàng không qua kho bé hơn R^* thì nhu cầu lớn hơn mức dự báo hoặc khả năng sản xuất tăng.

Có hai tình huống đơn giản là:

- Vấn đề dự báo và điều chỉnh tổng nhu cầu: Q

- Vấn đề đánh giá năng lực thực tế của đơn vị: K

+ *Tổng nhu cầu Q:* Khi tiến hành lập kế hoạch tác nghiệp cho một thời kỳ T, chúng ta dựa trên nhiều nguồn thông tin để xác định tổng nhu cầu Q cho một doanh nghiệp, một khu vực,... Không thể và cũng không có đủ khả năng xác định chính xác Q. Chúng ta có thể căn cứ vào tình hình dự trữ - tiêu thụ của một phần thời gian để hiệu chỉnh tham số này.

1. Giả sử trong thời gian T = 1 ta có dự báo một nhu cầu Q đều đặn. Bằng năng lực cung cấp K, sau thời gian αT ta xác định được lượng hàng không qua kho R_1 (hoặc tương ứng là lượng hàng qua kho $R_2 = \alpha K - R_1$). Như vậy lượng hàng không qua kho R_1 chính là lượng hàng thực tế tiêu thụ trong thời gian $\alpha T = \alpha$. Nhu cầu thực tế sẽ là $Q' = R_1/\alpha$.

2. Lời giải trong tình huống đơn giản nói trên có thể không thực tế, do doanh nghiệp luôn có một chiến lược theo chu kỳ. Vì vậy chỉ sau một chu kỳ hay cả năm người ta mới có khả năng đánh giá lại thị trường. Sau đây ta xét trường hợp thời gian sản xuất ban đầu làm cơ sở đánh giá là 1 chu kỳ:

Trong một chu kỳ, giả sử ta sản xuất lượng hàng q, nếu nhu cầu cả năm là Q, lượng hàng qua kho là $S = q(1 - Q/K)$. Giả sử lượng hàng qua kho thực tế là S' khác S và thời gian sản xuất của chu kỳ này là t_s^0, như vậy ta có thể thay $q = t_s^0 K$. Nhu cầu thực tế Q' nhận được từ phương trình $S' = t_s^0 K (1 - Q'/K)$.

Nghiệm phương trình này là: $Q' = K - S'/t_s^0$.

3. Trường hợp đơn giản nhất, cơ sở đánh giá là một năm sản xuất và tiêu thụ. Như đã nói ở trên lượng hàng không qua

kho lý thuyết là $R^* = \frac{Q^2}{K}$, nếu lượng hàng không qua kho thực tế là R' khác R^* ta có thể xác định lại Q' nhờ công thức sau: $Q' = \sqrt{S'K}$.

+ *Khả năng sản xuất K:* Hoàn toàn như trên, bài toán đánh giá lại khả năng sản xuất cũng có thể phân chia thành 3 trường hợp tương tự. Tuy nhiên, cần chú ý rằng đánh giá lại khả năng cung cấp thường chỉ có ý nghĩa khi bản thân doanh nghiệp không tự sản xuất, hàng hoá nhận được từ một hay một số nguồn cung khác. Về mặt kỹ thuật cũng như tính toán cụ thể không có gì khó khăn.

e. Thí dụ

Thí dụ 5.5 (bài toán cơ bản): Một cơ sở sản xuất săm lốp xe hơi có công suất thiết bị 2000000 bộ/năm, nhu cầu tiêu thụ 1400000 bộ/năm. Chi phí cho một lần chuẩn bị sản xuất là 400$, chi phí sản xuất mỗi bộ 140$. Chi phí bảo quản có hệ số 0,01. Thời gian chuẩn bị 1 đợt sản xuất 45 ngày.

a. Hãy phân chia nhu cầu trên thành các đợt sản xuất sao cho tổng chi phí bé nhất.

b. Nếu mỗi lần sản xuất 6000 bô thì chi phí cho mỗi bộ là 138$, có nên làm theo qui mô này không?

Giải:

Tóm tắt các dữ kiện:

Tổng công suất: K	=	2000000 bộ/năm
Tổng nhu cầu: Q	=	1400000 bộ/năm
Chi phí đặt hàng: A	=	400
Giá hàng: C	=	140

Hệ số chi phí dự trữ: I = 0,01

Thời gian đặt hàng: T_0 = 0,123288 năm

Tính theo ngày: 45 ngày

Lời giải của bài toán trên là:

a. Lượng hàng đặt mỗi lần sẽ là: $q^* = 51639, 77795$

Lượng hàng cực đại trong kho: $s^* = 15491,93338$

Tổng chi phí bé nhất là: $F(q^*) = 196021688,7$

Thời gian 1 chu kỳ là: $t^* = 0,036885556$

Số chu kỳ trong 1 năm là: $n^* = 27,11088342$

Điểm đặt hàng: $B^* = 14552,72$

Ta có $B = Q(T_0 - t^* int(T_0/t^*)) = 17683,86 > S^* = 15491,93338$

Đặt hàng khi đang làm đầy kho.

b. Nếu mỗi lần sản xuất 6000 bộ thì tổng chi phí sẽ là:

$$F(6000) = 400 \times 1400000/6000 + 6000\,(1 - 1400000/2000000) \times 130 \times 0,01/2 + 1400000, 138 = 179294503,3$$

Ta thấy $F(6000) < F(q^*)$, vậy nên chọn lô hàng sản xuất mỗi lần là 6000 bộ.

Thí dụ 5.6 **(đánh giá lại nhu cầu):** Một doanh nghiệp cung cấp thuốc bảo vệ thực vật dự báo trên địa bàn mình cung cấp lượng tiêu thụ mỗi năm là 30000 đơn vị. Công suất thực tế của doanh nghiệp là 45000 đơn vị/năm. Chí phí cho 1 lần chuẩn bị sản xuất là 2 triệu, chi phí sản xuất tính trực tiếp cho mỗi đơn vị thuốc bảo vệ thực vật này là 200 nghìn đồng. Chi phí bảo quản bằng 15% chi phí sản xuất trực tiếp. Thời gian chuẩn bị một đợt sản xuất là 1 tháng.

a. Hãy xác định số đơn vị thuốc cần sản xuất mỗi đợt sao cho tổng chi phí nhỏ nhất. Xác định điểm (lượng thuốc còn trong dự trữ) chuẩn bị sản xuất.

b. Giả sử với phương án xác định ở câu a, tiến hành sản xuất tiêu thụ 1 chu kỳ người ta thấy lượng thuốc qua dự trữ là 1000 đơn vị. Hãy xác định lại tổng nhu cầu và phương án sản xuất tiếp theo.

c. Nếu năm sau tình hình không có gì thay đổi so với năm hiện tại thì chiến lược sản xuất tiêu thụ như thế nào?

Giải:

a. Ta có thể tóm tắt bài toán trên như một bài toán dự trữ với các dữ kiện sau:

Tổng công suất: K = 45000,00

Tổng nhu cầu: Q = 30000,00

Chi phí đặt hàng: A = 2,00

Hệ số chi phí dự trữ = 0,150

Đơn giá = 0,200

Thời gian đặt hàng (số ngày) T = 30

Với MH4, lời giải của bài toán là:

Lượng hàng đặt tốt nhất là $q^* = 3464,10$

Lượng hàng tối đa trong kho $s^* = 1154,70$

Tổng chi phí nhỏ nhất $N(q^*) = 6034,641$

Thời gian một chu kỳ $t^* = 0,1155$

Số lần đặt hàng $n^* = 8,66$

Điểm đặt hàng $B^* = 499,17$

Ta có $B = Q(T_0 - t^* int(T_0/t^*)) = 2465,753 > S^* = 1154,7$

Đặt hàng khi đang làm đầy kho.

b. Giả sử chúng ta tiến hành sản xuất và tiêu thụ trong một chu kỳ theo kết quả nhận được ở câu a, lượng hàng qua kho là 1000 đơn vị. Ta thấy lượng hàng qua kho nhỏ hơn S* tức là khả năng tiêu thụ lớn hơn hay tổng nhu cầu cao hơn.

Xác định lại tổng nhu cầu Q:

- Thời gian sản xuất trong một chu kỳ: $t_s = 0,07689$

- Tổng nhu cầu dự báo lại: $Q^* = K - S'/t_s = 32009,6$ (đơn vị).

Phương án cho thời gian còn lại trong năm: Do thời gian sản suất tiêu thu của chu kỳ đầu không có khả năng hiệu chỉnh nên ta không xét đến việc bổ sung nhu cầu cho chu kỳ này. Tổng nhu cầu của thời gian còn lại có thể tính như sau: $Q = Q^*(1 - 0,1155) = 28321$.

Tổng công suất còn lại là $K = K(1 - 0,1155) = 39802$. Thời gian còn lại là $T = 0,8845$.

Để đơn giản cho việc tính toán, trước tiên chúng ta xem 1 đơn vị thời gian là 0,8845 năm. Hiệu chỉnh hệ số chi phí dự trữ theo công thức: $I' = I^*0,8845 = 0,132675$. Thời gian đặt hàng qui ước là 34 ngày.

Lời giải nhận được từ MH4 như sau:

Tổng công suất: K = 39802,00

Tổng nhu cầu: Q = 28312,00

Chi phí đặt hàng: A = 2,00

Hệ số chi phí dự trữ = 0,133

Đơn giá = 0,200

Thời gian đặt hàng (số ngày) T = 34

Kết quả giải bài toán

Lượng hàng đặt tốt nhất là $q^* = 3845,02$

Lượng hàng tối đa trong kho $s^* = 1109,98$

Tổng chi phí nhỏ nhất $N(q^*) = 5691,853$

Thời gian một chu kỳ $t^* = 0,1358$

Số lần đặt hàng $n^* = 7,36$

Điểm đặt hàng $B^* = 490,14$

Ta có $B = Q(T_0 - t^* int(T_0/t^*)) = 2637,28 > S^* = 1109,89$

Đặt hàng khi đang làm đầy kho.

Với kết quả trên: Trong thời gian còn lại ta chia tổng nhu cầu thành 7,36 lần, mỗi lần sản xuất 3845,02 đơn vị. Thời gian của mỗi chu kỳ sản xuất, tiêu thụ là: $t'^* = t^*0,8845 = 0,120115 =$ 43 ngày.

c. Tổng nhu cầu năm sau: Q = 32009

Giải bài toán với số liệu sau:

Tổng công suất: K = 45000,00

Tổng nhu cầu: Q = 32009,00

Chi phí đặt hàng: A = 2,00

Hệ số chi phí dự trù = 0,150

Đơn giá = 0,200

Thời gian đặt hàng (số ngày) T = 30

Kết quả với MH4 như sau:

Lượng hàng đặt tốt nhất là $q^* = 3844,95$

Lượng hàng tối đa trong kho $s^* = 1109,99$

Tổng chi phí nhỏ nhất $N(q^*) = 6435,100$

Thời gian một chu kỳ $t^* = 0,1201$

Số lần đặt hàng $n^* = 8,32$

Điểm đặt hàng $B^* = 492,7488$

Ta có $B = Q(T_0 - t^* int(T_0/t^*)) = 2630,877 > S^* = 1109,99$

Đặt hàng khi đang làm đầy kho.

Thí dụ 5.7 (đánh giá lại khả năng): Một cơ sở sản xuất bột giặt, với trang bị kỹ thuật, lao động, tiền vốn,... ước tính có thể sản xuất 60000 tấn/năm. Nhu cầu thị trường chỉ ở mức 40000 tấn/năm, chi phí cho mỗi đợt chuẩn bị sản xuất là 140$, chi phí sản xuất trực tiếp cho mỗi tấn là 900$, việc tiêu thụ có thể xem là đều đặn. Chi phí bảo quản bằng 0,01 chi phí sản xuất trực tiếp. Trong năm t cơ sở này đáp ứng vừa đủ nhu cầu nói trên và chia thành 4 đợt sản xuất, mỗi đợt 10000 tấn.

a. Hãy xác định khả năng sản xuất thực của cơ sở trong năm t. Biết rằng lượng hàng không qua kho là 20000 tấn.

b. Năm t + 1 mọi chi phí tăng 10%; thời gian đặt hàng 120 ngày; tính số lượng cần sản xuất mỗi đợt sao cho tổng chi phí nhỏ nhất; tính điểm đặt hàng tương ứng.

Giải

a. Lượng hàng không qua kho trong trường hợp chọn qui mô tối ưu tính được là $R^* = Q^2/K$ sấp xỉ 26666,666 tấn. Như vậy lượng hàng không qua kho nhỏ hơn mức lý thuyết. Ta thấy từ công thức tính S lượng hàng không qua kho có hể tính theo công thức sau: $R = Q^2/K$. Ta có thể ước tính khả năng thực của cơ sở là: $K^* = Q^2/R^* = 80000$ tấn.

b. Tóm tắt số liệu: (với giả thiết mọi chi phí tăng 10%)

Tổng công suất: K = 80000,00

Tổng nhu cầu: $Q = 40000,00$

Chi phí đặt hàng: $A = 154,00$

Hệ số chi phí dự trữ: $I = 0,010$

Đơn giá: $C = 990,000$

Thời gian đặt hàng (số ngày): $T_0 = 120$

Kết quả giải bài toán

Lượng hàng đặt tốt nhất là $q^* = 1577,62$

Lượng hàng tối đa trong kho là $S^* = 788,81$

Tổng chi phí nhỏ nhất $N(q^*) = 39607809,225$

Thời gian một chu kỳ $t^* = 0,0394$

Số lần đặt hàng $n^* = 25,35$

Điểm đặt hàng $B^* = 529,71$

Ta có: $B = Q(T_0 - t^* int(T_0/t^*)) = 542,6849 < S^* = 788,81$

Đặt hàng khi đang làm vơi kho.

4. Mô hình dự trữ trong trường hợp giá hàng thay đổi theo số lượng đặt mua mỗi lần (Mô hình dự trữ nhiều mức giá)

Trong các mô hình trên, ta giả thiết giá của mỗi đơn vị hàng không đổi. Thực tế do nhiều lý do khác nhau, giá hàng có thể thay đổi theo qui mô của lô hàng mua mỗi lần, chẳng hạn người ta có thể chia các mức giá thành: giá bán lẻ, giá bán buôn cấp 1, cấp 2, hay giá theo đơn đặt hàng có ứng vốn... Nói một cách tổng quát là giá mỗi đơn vị hàng có thể thay đổi theo số lượng hàng đặt mỗi lần. Sau đây ta xét một mô hình đại diện cho trường hợp này.

a. Mô tả bài toán

Nhu cầu một loại hàng trong thời gian T là Q đơn vị. Chi phí cho mỗi lần đặt hàng là A, hệ số chi phí dự trữ là I, giá hàng thay đổi theo số lượng mua mỗi lần q như sau:

nếu $q < s_1$ giá c_1

$s_1 \le q < s_2$ giá c_2

$s_2 \le q < s_3$ giá c_3

.....

$s_{k-1} \le q < s_k$ giá c_k

$s_{n-1} \le q$ giá c_n

trong đó: $s_1 < s_2 < ..... < s_{n-1}$

ta gọi s_i (i = 1,2,..., n) là các mốc thay đổi giá;

có thể xem như $s_0 = 0$ và $s_n = +\infty$; và $c_1 > c_2 > ... > c_n$.

b. Thiết lập mô hình

Để đơn giản cho việc tìm lời giải ta giả thiết thời gian bổ sung hàng không đáng kể (bổ sung tức thời).

Đặt:

$$F_i(q) = \frac{AQ}{q} + IC_i\frac{q}{2} + C_iQ$$

Đây chính là hàm tổng chi phí nếu mua hàng với giá c_i

Ta có:

$$F(q) = \begin{cases} F_1(q) & \text{khi} \quad q \in (0, s_1) \\ F_2(q) & \text{khi} \quad q \in [s_1, s_2) \\ \quad\quad ..... & \\ F_{n-1}(q) & \text{khi} \quad q \in [s_{n-2}, s_{n-1}) \\ F_n(q) & \text{khi} \quad q \in [s_{n-1}, \infty) \end{cases}$$

c. Lời giải

Theo giả thiết ta có: $F_1(q) > F_2(q) > ... > F_n(q)$ với mọi giá trị $q > 0$.

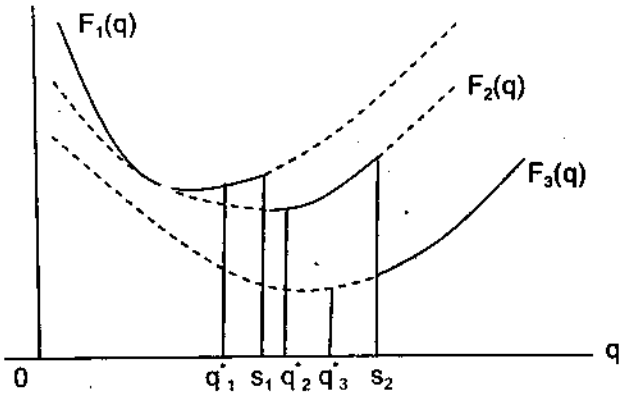
Gọi q_i^* là điểm cực tiểu của hàm $F_i(q)$ ta có:

$$q_i^* = \sqrt{\frac{2AQ}{ICi}} \quad (1)$$

do c_i giảm nên ta luôn có: $q_i^* > q_{i-1}^*$

mặt khác: $F_i(q_i^*) = C_iQ + 2AQ/q_i^* < F_{i-1}(q_{i-1}^*) = C_{i-1}Q + 2AQ/q_{i-1}^*$.

Có thể mô tả trên đồ thị như sau (trường hợp 3 mức giá)



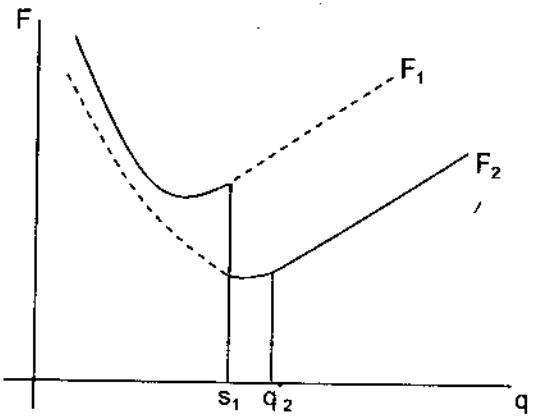
Với các đặc điểm trên ta có thể mô tả thuật toán tìm giá trị tối ưu q^* như sau:

+ Trường hợp hai mức giá

Tính $q_2^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC_2}}$

+ Nếu $q_2^* \geq s_1$ thì lượng hàng đặt tối ưu $q^* = q_2^*$

Có thể mô tả trường hợp này trên đồ thị như sau:



+ Nếu $q^*_2 < s_1$ tính: $F_2(s_1) = \frac{AQ}{s_1} + \frac{IC_2 s_1}{2} + C_2 Q$. Đây là giá trị bé nhất của hàm tổng chi phí với $q \geq s_1$.

• Tính $q^*_1 = \sqrt{\frac{2AQ}{IC_1}}$; $F_1(q^*_1) = \sqrt{2AQIC} + C_1 Q$

Có ba trường hợp có thể xảy ra như sau:

nếu $F_2(s_1) < F_1(q^*_1)$: thì $q^* = s_1$

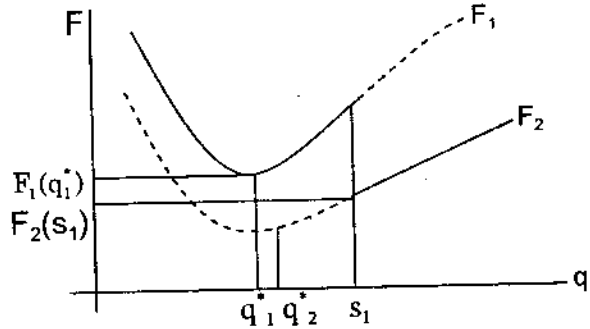
nếu $F_2(s_1) > F_1(q^*_1)$: thì $q^* = q_1^*$

nếu $F_2(s_1) = F_1(q^*_1)$: thì $q^* = q_1^*$ hoặc $q^* = s_1$

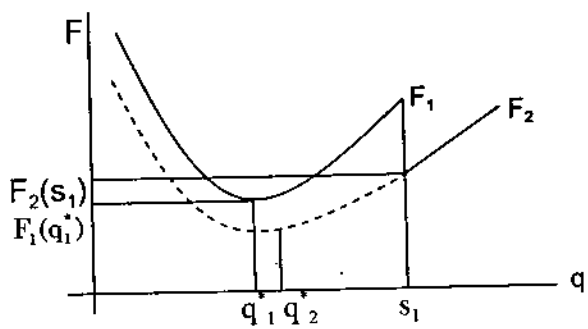
(hai điểm cực tiểu)

Có thể mô tả các trường hợp này trên đồ thị như sau:

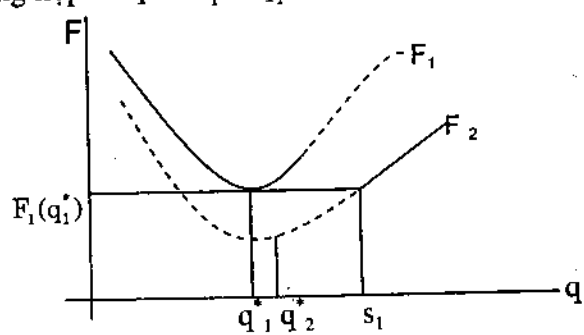
Trường hợp 1: $F_2(s_1) < F_1(q_1^*)$; $q^* = s_1$



Trường hợp 2: $F_2(s_1) > F_1(q_1^*)$: $q^* = q_1^*$



Trường hợp 3: $q^* = s_1 = q_1^*$.



+ Trường hợp tổng quát (n mức giá)

Thuật toán: Thực tế có thể sử dụng một số thuật toán khác nhau để giải bài toán trong trường hợp có nhiều mức giá. Dưới đây là một thuật toán có thể sử dụng tiện lợi cho việc tính toán thủ công, theo từng bước tính.

Xét từ hàm $F_n(q)$ để tìm giá trị nhỏ nhất của hàm F(q) trong khoảng $[s_{n-1}, +\infty)$, nếu giá trị đó đặt tại điểm cực trị thì ta nhận được giá trị $q^* = q_n^*$ là giá trị tại đó F(q) nhỏ nhất toàn bộ (với $q < +\infty$); ngược lại ta lấy giá trị $F_n(s_{n-1})$ làm giá trị nhỏ nhất địa phương.

Xét khoảng $[s_{n-2}, s_{n-1})$ để tìm giá trị nhỏ nhất của F(q) biểu hiện bởi giá trị nhỏ nhất của hàm $F_{n-1}(q)$ trong khoảng này; so sánh với giá trị nhỏ nhất trong khoảng trước...

Như vậy, ta tìm được q^* khi nhận được giá trị đầu tiên $q_i^* \in [s_{i-1}, s_i)$.

Cụ thể là:

+ Tính q_n^*,

- Nếu $q_n^* \geq s_{n-1}$ thì $q^* = q_n^*$ giá trị nhỏ nhất của F(q) là: $F(q_n^*)$.

- Nếu $q_n^* < s_{n-1}$, tính $F_n(s_{n-1})$ và

+ Tính q_{n-1}^*,

- Nếu $q_{n-1}^* \geq s_{n-2}$ thì tính $F_{n-1}(q_{n-1}^*)$ và so sánh giá trị này với $F_n(s_{n-1})$, giá trị nhỏ nhất tương ứng cho biết lượng q^* tối ưu.

- Nếu $q_{n-1}^* < s_{n-2}$, tính $F_{n-1}(s_{n-2})$ và

+ Tính q_{n-2}^*,

- Nếu $q_{n-2}^* \geq s_{n-3}$ thì tính $F_{n-2}(q_{n-2}^*)$ và so sánh giá trị này với $F_{n-1}(s_{n-2})$ và $F_n(s_{n-1})$, giá trị nhỏ nhất tương ứng cho biết lượng q^* tối ưu.

- Nếu $q^*_{n-2} < s_{n-3}$, tính $F_{n-2}(q^*_{n-3})$...

Tiếp tục thuật toán này cho đến khi nhận được $q^*_i \in [s_{i-1}, s_i)$ và tìm được lượng đặt hàng tối ưu q^*.

Cũng có thể thực hiện thuật toán trên một cách máy móc nhưng đơn giản hơn khi số mức giá quá lớn như sau:

Tính các giá trị q^*_k với k = n,n – 1,n – 2... cho đến khi nhận được q^*_i thoả mãn điều kiện $q^*_i \in [s_{i-1}, s_i)$.

Tính $\{F_k(s_{k-1})$ với $s > i\}$ và $F_i(q^*_i)$.

Tìm Min $\{F_k(s_{k-1})$ với $s > i$; $F_i(q^*_i)\}$.

Điểm đạt giá trị nhỏ nhất chính là điểm cực biên tiểu của hàm F(q).

Dễ dàng tập hợp các thông tin cần thiết cho việc tìm lời giải trên một bảng có dạng sau:

k	q^*_k	s_{k-1}	Min F(q)
n n-1 n-2			.....

d. Thí dụ

Thí dụ 5.8: Một công ty kinh doanh một loại bóng điện, tổng lượng hàng có khả năng tiêu thu là 10000 thúng/năm. Chi phí cho 1 lần đặt mua là 20$; hệ số chi phí bảo quản là 10%, cường độ bán ra đều đặn. Thời gian nhập kho không đáng kể. Nếu mỗi lần đặt mua từ 2000 thùng trở lên thì giá 1 thùng là 120$, ngược lại giá 1 thùng là 120,5$. Xác định

lượng hàng mua mỗi lần sao cho tổng chi phí nhỏ nhất; tính thời gian 1 chu kỳ dự trữ và tiêu thụ, tính điểm đặt hàng tương ứng.

Giải:

Đây là bài toán có thể mô hình hoá dưới dạng bài toán dự trữ 2 mức giá, với các dữ kiện sau:

		s_{k-1}	Giá c_k
Tổng nhu cầu Q	= 10000	2000	120
Chi phí đặt hàng A	= 20	0	120,5

Hệ số chi phí dự trữ I = 0,1

Thời gian đặt hàng T_0 = 0,2465 năm

Tính theo ngày 90 ngày

Tính theo tháng 3 tháng

Thực hiện thuật toán

$q^*(k)$	$F^*(k)$
182,5742	Vì q_2^* nhỏ hơn mức s_1, ta tính:
	$F^*(s_1)$ = 1212100
182,195	$F^*(q^*_k)$ = 1207195

Kết quả: Ta có $q^* = q_1^*$

Lượng hàng đặt mỗi lần:	q^* =	182,195
Tổng chi phí bé nhất:	F(q) =	1207195
Thời gian 1 chu kỳ:	t^* =	0,01822
Số lần đặt hàng trong năm:	n^* =	54,88625
Điểm đặt hàng:	B^* =	97,21833

Thí dụ 5.10: Một cửa hàng kinh doanh phân bón vô cơ, nhu cầu của khu vực là 20000 bao/năm, chi phí mỗi lần đặt hàng là 50$, hệ số chi phí dự trữ là 0,2. Giá hàng tuỳ thuộc lượng hàng mua mỗi lần q như sau:

$0 \le q < 5000$	giá 1 bao là 4,3$
$5000 \le q < 15000$	giá 1 bao là 4,1$
$15000 \le q$	giá 1 bao là 4$.

Hãy xác định chiến lược dự trữ sao cho tổng chi phí bé nhất.

Giải:

Tóm tắt các dữ kiện như sau:

Tổng nhu cầu Q	=	20000	$s_2 = 15000$	$c_3 = 4$
Chi phí đặt hàng A	=	50	$s_1 = 5000$	$c_2 = 4,1$
Hệ số chi phí dự trữ I	=	0,2		$c_1 = 4,3$
Thời gian đặt hàng T:	=	0,246575		
Tính theo ngày	=	90		

Lời giải của bài toán:

Lượng hàng đặt mỗi lần:	q^*	=	5000
Tổng chi phí bé nhất:	$F^*(q)$	=	84250
Thời gian 1 chu kỳ:	t^*	=	0,25
Số lần đặt hàng trong năm:	n^*	=	4
Điểm đặt hàng:	B^*	=	4931,507

5. Bài toán dự trữ nhiều loại hàng và bài toán với các điều kiện ràng buộc

Trong các bài trên ta đã xét lớp bài toán dự trữ một loại hàng, cùng với các giả thiết về chi phí không có một ràng buộc

nào. Trong bài này, chúng ta xét bài toán dự trữ với hai hướng mở rộng, đó là bài toán dự trữ có ràng buộc và nhiều loại hàng. Các bài toán sẽ được trình bày từ đơn giản đến phức tạp. Một số bài toán sẽ được chỉ ra kết quả mà không trình bày chi tiết thuật toán.

a. Bài toán dự trữ một loại hàng có ràng buộc

Đơn giản cho quá trình thể hiện ta xét mô hình Wilson với ràng buộc về qui mô kho.

Chúng ta biết rằng với mô hình Wilson, qui mô kho coi như tuỳ chọn. Thực tế điều đó có thể không đúng, giả sử qui mô kho của doanh nghiệp dự trữ chỉ ở mức q^0. Bài toán lập từ mô hình Wlison có thể phát biểu như sau:

Tìm q làm cực tiểu hàm: $D(q) = \frac{AQ}{q} + \frac{ICq}{2}$

Với điều kiện: $0 \le q \le q^0$.

a. Nếu $q^0 \ge q^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC}}$ lời giải bài toán không bị ảnh hưởng bởi ràng buộc về qui mô kho.

b. Nếu $q^0 < q^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC}}$

Có hai tình huống cơ bản như sau:

1. Chấp nhận không thoả mãn nhu cầu, lời giải là: $q^* = q^0$. Tổng chi phí là:

$$N^0(q^0) = \frac{AQ}{\sqrt{\frac{2AQ}{IC}}} + IC\frac{(q^0)^2}{2q^*} + CQ\frac{q^0}{q^*}$$ (hãy tự chứng minh

công thức này với giả thiết chia đều mức không thoả mãn cho các chu kỳ).

2. Đảm bảo thoả mãn nhu cầu Q với các thông tin bổ sung cần thiết.

Một trong các tình huống thông thường đã được trình bày trong bài toán thuê kho ở mô hình Wilson. Như vậy, ta phải có hệ số chi phí dự trữ thuê ngoài phụ thêm (k) như đã được trình bày.

a. Bài toán dự trữ nhiều loại hàng có ràng buộc

Dễ dàng nhận thấy rằng trong điều kiện không có một điều kiện ràng buộc nào trong quá trình dự trữ, tiêu thụ thì bài toán dự trữ nhiều loại hàng có thể phân chia thành các bài toán độc lập. Vì lý do đó chúng ta chỉ xét bài toán dự trữ nhiều loại hàng, có ràng buộc.

+ Mô tả bài toán

Giả sử cần dự trữ m loại hàng với nhu cầu thường xuyên trong mỗi đơn vị thời gian là Q_i đơn vị ($i = 1 \div m$). Chi phí cho mỗi lần đặt hàng loại i là A_i, giá mỗi đơn vị hàng loại i là C_i, I_i là hệ số chi phí dự trữ hàng i, hệ số dùng tích kho của đơn vị hàng i là f_i. Các giả thiết về tiêu thụ và cung cấp như mô hình Wilson. Hãy xác định chiến lược dự trữ, tiêu thụ tốt nhất, trong các trường hợp:

- Cơ sở dự trữ có một dung tích kho f_0 cho m loại hàng.
- Khả năng vốn cho mỗi chu kỳ dự trữ, tiêu thụ hạn chế là C_0.
- Thời gian dự trữ tối đa của mỗi loại hàng t_i.

+ Thiết lập mô hình và lời giải

Trước tiên cần phải nói rằng các tình huống nêu trên dẫn

đến các ràng buộc của bài toán rất phong phú. Chúng ta chỉ xét một vài tình huống với mục đích tìm kiếm cách thiết lập mô hình và lời giải. Về mặt lý thuyết, các bài toán như trên luôn dẫn đến bài toán tối ưu phi tuyến, chúng ta có thể nhận được lời giải nhờ các thuật toán của qui hoạch phi tuyến. Trong thời hạn nhất định về mặt công cụ, chúng ta chỉ đưa ra lời giải với những điều kiện có thể. Mặc dù các lời giải được nêu dưới đây có thể không tổng quát nhưng chúng ta có ý nghĩa thực tiễn nhất định.

1. Bài toán với ràng buộc dung tích kho

Hoàn toàn tương tự mô hình Wilson ta có thể thiết lập bài toán như sau:

Tìm $q = (q_1, q_2,..., q_m)$, $n = (n_1, n_2,... n_m)$ không âm, cực tiểu hàm

$$N(q,n) = \sum_{i=1}^{m} n_i A_i + I_i C_i \frac{q_i}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_i q_i \le f_0 \quad n_i q_i = Q_i \quad i = 1 \div m \tag{1.5}$$

Bài toán (1.5) là một bài toán qui hoạch phi tuyến với ràng buộc tuyến tính. Bài toán này luôn có lời giải vì N(q) là một hàm lồi trên miền $q > 0$, với miền ràng buộc lồi đóng và bị chặn.

Trong điều kiện công cụ toán học đơn giản, ta có thể tìm lời giải của bài toán như sau:

Bước 1: Giải bài toán (1.5) bỏ qua các ràng buộc $\sum_{i=1}^{m} f_i q_i \le f_0$, ta nhận được lời giải như sau:

$$q^* = \sqrt{\frac{2A_iQ_i}{I_iC_i}} \qquad (i = 1 \div m) \qquad (2.5)$$

Nếu: $\sum_{i=1}^{m} f_i q_i^* \le f_0$, ta nhận được lời giải của bài toán (1.5). Đây cũng là lời giải của bài toán dự trữ nhiều loại hàng không có ràng buộc.

Nếu: $\sum_{i=1}^{m} f_i q_i^* > f_0$, ta có thể chọn một trong các cách giải ở bước 2.

Bước 2:

- Trường hợp thoả mãn nhu cầu với chi phí phụ thêm cho việc thuê kho. Bài toán qui về bài toán sau:

Tìm $q = (q_1, q_2, \ldots q_m)$ không âm, cực tiểu hàm:

$$N(q) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{Q_i}{q_i} A_i + I_i C_i \frac{q_i}{2}\right) \qquad (3.5)$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_i q_i = f_0$$

Đây là bài toán cực trị vướng, hàm Lagrange tương ứng là:

$$L(q, \lambda) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{Q_i}{q_i} A_i + I_i C_i \frac{q_i}{2}\right) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{m} f_i q_0 - f_0\right)$$

Lời giải của bài toán nói chung không biểu diễn giải tích. Cụ thể là từ điều kiện cần của cực trị hàm Lagrange dẫn đến một phương trình phi tuyến đối với λ.

Tuy nhiên, hãy chú ý đến nghĩa của nhân tử λ, dễ dàng nhận thấy: $\frac{\partial L}{\partial f_0} = -\lambda$. Như vậy, λ chính là chi phí biên theo qui

mô kho, cách lựa chọn hợp lý và đơn giản hơn cả là xác định thiệt hại khi phải thuê thêm một đơn vị dung tích kho: $\lambda = \lambda^*$.

Lợi dụng hàm Lagrange ta xác định lời giải của bài toán nhờ công thức sau:

$$q^* = \sqrt{\frac{2Q_iA_i}{I_iC_i + 2\lambda^* f_i}} \qquad (i = 1 \div m) \qquad (4.5)$$

- Trường hợp chấp nhận không thoả mãn nhu cầu, bài toán chỉ có lời giải có ý nghĩa khi bổ sung thông tin về thiệt hại do không thoả mãn nhu cầu của từng loại hàng. Bài toán trở nên phức tạp hơn nhiều, chúng ta chỉ có thể nhận được lời giải nhờ các thuật toán qui hoạch phi tuyến.

Chú ý: Về mặt lý thuyết ràng buộc về dung tích kho là quá chặt vì trừ thời điểm bắt đầu dự trữ tiêu thụ (khi tất cả m loại hàng nhập kho), các thời điểm khác tổng lượng hàng lưu kho tối đa không phải là $\sum_{i=1}^{m} f_i q_i^*$. Hơn nữa, với các loại hàng tiêu thụ thông thường và đều đặn thì thực tế không có thời điểm bắt đầu. Tuy vậy, khi thời gian tăng vô hạn (đủ lớn) lượng hàng tối đa trong kho xấp xỉ mức nói trên. Điều này cho phép sử dụng ràng buộc dung tích kho để tính toán như đã trình bày ở trên.

2. Bài toán với ràng buộc vốn

Để đơn giản cho quá trình tính toán ta giả sử ràng buộc vốn chỉ đặt trên lượng tiền trực tiếp mua hàng mỗi chu kỳ dự trữ. Thay cho ràng buộc dung tích kho ta sử dụng ràng buộc: $\sum_{i=1}^{m} C_i q_i \le C_0$. Hoàn toàn tương tự như trong trường hợp ràng buộc dung tích kho ta có thể tiến hành giải bài toán theo hai bước.

Tuy vậy, có thể xây dựng mô hình riêng cho bài toán này bằng cách coi nguồn vốn là vô hạn và đưa thêm giá vốn vào mô hình, lúc đó ta có bài toán với giá vốn cho m loại hàng như sau:

Tìm $q = (q_1, q_2, ..., q_m)$ cực tiểu hàm:

$$F(q) = \sum_{i=1}^{m} (A_i r + A_i \frac{Q_i}{q_i} + C_i I_i \frac{q_i}{2} + r \frac{C_i q_i}{2} + C_i Q_i).$$

Lời giải của bài toán là: $q_i^* = \sqrt{\frac{2A_i Q_i}{I_i C_i + rC_i}}$ $(i = 1 \div m)$.

Chúng ta có thể sử dụng cùng lúc nhiều ràng buộc cho bài toán dự trữ nhiều loại hàng. Nhưng cần chú ý rằng, giới hạn của công cụ không cho phép mở rộng bài toán quá mức. Trong trường hợp cần thiết ta có thể dùng các mô hình tối ưu khác để nhận được lời giải chính xác và dễ dàng hơn.

III. MỘT SỐ MÔ HÌNH VỚI CÁC YẾU TỐ NGẪU NHIÊN

Các bài toán điều khiển dự trữ dẫn đến mô hình trong đó có những yếu tố ngẫu nhiên rất phổ biến. Việc nghiên cứu chúng có thể được đề cập dưới những góc độ khác nhau, tuỳ thuộc mục đích nghiên cứu và công cụ có thể sử dụng. Sau đây ta chỉ nghiên cứu một số bài toán điều khiển dự trữ đề cập đến *tính ngẫu nhiên của một yếu tố;* hơn nữa các yếu tố ngẫu nhiên cũng được xem như đã biết *qui luật phân phối xác suất* của nó. Như vậy, các nghiên cứu dù là rất cụ thể cũng chủ yếu mang tính phương pháp, nhờ đó ta có thể nghiên cứu những bài toán tương tự.

1. Mô hình dự trữ một giai đoạn

Phần này ta xét một mô hình nhu cầu Q là một biến ngẫu nhiên. Mô hình này tương ứng với bài toán dự trữ 1 giai đoạn. Tuy vậy, có thể sử dụng để xác định tổng lượng hàng tối ưu cho một thời kỳ T khi nhu cầu có tính ngẫu nhiên.

a. Mô tả bài toán

Nhu cầu một loại hàng trong thời kỳ T là một biến ngẫu nhiên Q tuân theo qui luật phân phối xác suất F(q), với trung bình và phương sai hữu hạn. Người kinh doanh có thể mua với giá C_0 và bán với giá C_1 ($C_1 > C_0$), việc không thoả mãn nhu cầu dẫn đến tổn thất là C_z đối với 1 đơn vị hàng thiếu, số hàng thừa sẽ phải bán với giá C_s ($C_s < C_0$). Hãy xác định lượng mua S có lợi nhuận kỳ vọng lớn nhất trong thời gian T.

b. Thiết lập mô hình

+ Trường hợp Q là biến ngẫu nhiên rời rạc:

Nếu gọi S là lượng hàng cần mua thì lượng hàng tiêu thụ được trong thời gian T là Min (S,Q), như vậy lợi nhuận trung bình (với Q rời rạc) có thể tính như sau:

Với lượng mua S, nếu nhu cầu $Q \leq S$ thì xuất hiện lượng hàng thừa, vì Q ngẫu nhiên nên lượng hàng thừa $(S - Q)$ cũng là biến ngẫu nhiên. Xác suất có lượng hàng thừa $(S - Q)$ rõ ràng là xác suất để nhu cầu bằng Q: P(Q).

Từ đó ta có thể tính lợi nhuận trung bình với điều kiện nhu cầu $Q \leq S$ là: $D_1(S) = \sum(C_1Q - C_0S + C_s(S - Q))P(Q)$

Ngược lại, khi nhu cầu $Q > S$, xuất hiện tình trạng thiếu hàng và gây nên tổn thất do thiếu hàng. Xác suất có lượng hàng

thiếu (Q – S) cũng tính tương tự như trên: P(Q). Vậy lợi nhuận trung bình với điều kiện nhu cầu Q > S là:

$$D_2(S) = \sum(C_1S - C_0S + C_Z(Q - S))P(Q)$$

Ta có hàm tổng lợi nhuận trung bình: $D(S) = D_1(S) + D_2(S)$. Vấn đề còn lại là phải xác định lượng mua S sao cho tổng lợi nhuận trung bình lớn nhất.

Kí hiệu: P(Q = S) là xác suất (Q = S) và P(Q < S) là xác suất (Q < S), ta có thể tính được các biểu thức sau:

$$D(S + 1) - D(S) = C_1 - C_0 + C_z - (C_1 + C_z - C_s)P(Q < S + 1)$$

$$D(S) - D(S - 1) = C_1 - C_0 + C_z - (C_1 + C_z - C_s)P(Q < S)$$

Điểm S* tối ưu phải thoả mãn điều kiện:

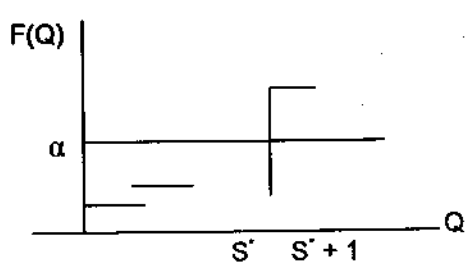
$$D(S^* + 1) - D(S^*) \le 0$$

và $$D(S^*) - D(S^* - 1) \ge 0$$

tức là: $P(Q < S^*) \le \dfrac{C_1 - C_0 + C_z}{C_1 + C_z - C_s} \le P(Q < S^* + 1)$.

đặt $\alpha = \dfrac{C_1 - C_0 + C_z}{C_1 + C_z - C_s}$; ta thấy khi $C_0 > C_s$ và $C_1 > C_0$ thì $0 < \alpha < 1$.

Như vậy S* chính là phân vị mức α của phân phối F(q). Có thể mô tả kết quả như sau:



Trong trường hợp $\alpha = P(Q < S^* + 1)$ ta có hai lời giải S^* và $S^* + 1$. Tuy nhiên, trong thực tế ta có thể không quan tâm nhiều đến khả năng này vì hai lý do: Thứ nhất là hai giá trị gần bằng nhau và S* luôn là một nghiệm; thứ hai là hàm lợi nhuận được tính như giá trị trung bình của một phân phối xác suất.

Thí dụ 5.11: Số hộp thít bán được trong mỗi ngày tại một cửa hàng là đại lượng ngẫu nhiên tuân theo qui luật Poát xông với trung bình là 20 hộp/ngày. Xác định số lượng cần mua của cửa hàng trong ngày để đảm bảo lợi nhuận trung bình trong ngày lớn nhất. Biết rằng giá mua buôn mỗi hộp là 15000VNĐ, giá bán lẻ là 18000VNĐ. Cửa hàng ước tính thiệt hại khi không thoả mãn nhu cầu (vì mất khách) là 1500VNĐ/1 hộp, ngược lại mỗi hộp không bán được phải bảo quản và phải bán với giá 13000VNĐ.

Giải:

Bài toán trên có thể mô tả dưới dạng toán dự trữ một giai đoạn với các tham số sau: $C_1 = 18000$; $C_0 = 15000$; $C_s = 13000$; $C_z = 1500$; ta có $\alpha = 0{,}6923$ tra bảng phân phối Poisson với trung bình 20 ta có: $Q^* = 22$.

+ Trường hợp Q liên tục:

Trong trường hợp phân phối của Q liên tục ta có thể làm tương tự và điểm S^* xác định sao cho: $F(S^*) = \alpha$, trong đó F(q) là hàm phân phối xác suất của nhu cầu Q. Nếu biết hàm mật độ xác suất của Q là f(q) thì xác định S^* nhờ công thức:

$\int_0^{s^*} f(q)dq = \alpha$. Như vậy S^* là phân vị mức α của Q.

Thật vậy, ta có: $D_1(S) = \int_0^S (C_1 q - C_0 S + C_s(S-q)) f(q)dq$

và $D_2(S) = \int_S^\infty (C_1 q - C_0 S + C_s(q-S)) f(q)dq$

Từ đó:

$$D(S) = (C_1 - C_0 + C_z)S(1-F(S)) + (C_1 - C_s)\int_0^S q f(q)dq$$

$$+ (C_s - C_0)SF(S) - C_z \int_s^S q f(q)dq$$

Lấy đạo hàm hàm D(S) và cho D'(S) = 0 ta có kết quả như trên.

Thí dụ 5.12: Nhu cầu phân đạm trong năm của một khu vực do công ty A cung cấp là 1 đại lượng ngẫu nhiên phân phối chuẩn với trung bình ước lượng là M(Q) = 12000 tấn, độ lệch tiêu chuẩn được ước lượng là 40 tấn. Giá mua vào là 120$/tấn, giá bán lẻ thông thường là 140$/tấn. Việc cung cấp thiếu mỗi tấn so với nhu cầu sẽ làm thất thiệt 30$, lượng tồn kho cuối kỳ chuyển sang kỳ sau với giá bán 115$/tấn.

a. Xác định lượng hàng mua sao cho tổng lợi nhuận cao nhất.

b. Giải bài toán trong trường hợp tình hình hàng năm được mô tả như trên, theo số lượng tính toán ở câu a. Biết chi phí dự trữ tính theo giá mua với hệ số 0,05; chi phí đặt hàng một lần 120$.

Giải:

a. Theo các dữ kiện trên ta có: $C_1 = 140$, $C_0 = 120$, $C_s = 115$, $C_z = 30$.

ta có: $\alpha = 0,9$.

sử dụng thuật toán lặp nhiều vòng để nhận được lời giản Cần tìm S^* sao cho $\Phi[(S^* - 12000)/40] = 0,9$. Tra bảng phân phối chuẩn ta có: $U_{0,9} = 1,28$;

vậy: $S^* = 1,28 \times 40 + 12000 = 12051,2$ (tấn)

b. Với $Q^* = S^* = 12051$ ta giải bài toán Wilson và nhận được kết quả sau:

Lượng hàng đặt tối ưu mỗi lần $q^* = 694,29$

Tổng chi phí dự trữ $N(q^*) = 120 \times 0,05 \times 694,29 = 4165,74$

Như vậy thực tế giá tính đủ cho mỗi tấn là:

$$C_{02} = 120 + 4165,74/Q^* = 120,346$$

Trở lại tính $\alpha = 0,9008$ ta thấy giá trị này không sai khác đáng kể so với giá trị ban đầu, vậy có thể chọn tổng lượng $Q^* = 12048$ và $q^* = 694,29$.

Chú ý:

- Trường hợp đơn giản là $C_S = 0$ tức là lượng hàng thừa phải huỷ (chẳng hạn, các loại vaxin, thực phẩm tươi sống, rau quả,...)

Ta có $\alpha = 1 - C_0/(C_1 + C_2)$, như vậy tỷ lệ $C_0/(C_1 + C_2)$ chính là xác suất của biến cố $(Q > S^*)$, tỷ lệ này cho biết khả năng thiếu hàng tại phương án tối ưu, tỷ lệ này tăng nếu như giá mua vào so với giá bán ra chênh lệch nhỏ, đồng thời thiệt hại do không thoả mãn nhu cầu không quá lớn.

- Như vậy đã trình bày, Q được xem là biến ngẫu nhiên, vì vậy sau khi xác định $Q^* = S^*$ ta cần giải bài toán tìm chiến lược đặt hàng chỏ mỗi thời kỳ. Trong trường hợp này giá hàng ứng với mô hình Wilson phải bao gồm giá mua, chi phí dự trữ, chi phí thất thiệt tính cho mỗi đơn vị hàng bị thiếu hụt tại chiến

lược dự trữ tối ưu. Việc phân bài toán thành hai bước giải như vậy chắc chắn không cho ta phương án tối ưu toàn bộ, vì vậy có thể gần đúng.

2. Mô hình dự trữ có bảo hiểm

Khi xét bài toán dự trữ đơn giản, ta giả thiết rằng thời gian đặt hàng cố định là T_0 từ đó xác định được điểm đặt hàng B^*. Như vậy, hàng trong kho vừa hết là có hàng bổ sung. Tuy nhiên trong thực tế, **thời điểm đặt hàng có thể là một biến ngẫu nhiên** tuân theo một qui luật phân phối xác suất nào đó. Trong trường hợp đó dù cho việc tiêu thụ là đều đặn thì lượng hàng tiêu thụ trong thời gian đặt hàng cũng trở thành một biến ngẫu nhiên. Điều đó có thể dẫn đến tình trạng thiếu hàng trong thời gian đặt hàng và có thể gây những thiệt hại nhất định cho các hoạt động kinh tế – xã hội. Trong nhiều trường hợp, hậu quả của việc thiếu hàng là rất lớn, chẳng hạn: Khi xét việc dự trữ thuốc phòng dịch, dự trữ vật liệu cho quá trình sản xuất liên tục,... Trong tình huống này cần xác định một lượng dự trữ, nhằm đảm bảo quá trình hoạt động kinh tế - xã hội có liên quan không bị gián đoạn với một xác suất cho phép (mức tin cậy, độ an toàn). Lượng dự trữ đó gọi là *lượng dự trữ bảo hiểm*. Ta có thể tóm tắt các nội dung trên bằng bài toán dưới đây.

a. Mô tả bài toán

Giả sử trong thời kỳ T = 1, tổng nhu cầu về một mặt hàng là Q đơn vị. Chi phí mỗi lần đặt hàng là A, giá hàng là C, hệ số chi phí bảo quản theo giá là I, thời gian đặt hàng là một biến ngẫu nhiên τ đồng nhất trong mỗi chu kỳ dự trữ - tiêu thụ, có phân phối xác suất $G(\tau)$ với trung bình và

phương sai hữu hạn (trong hầu hết các trường hợp có thể xem là τ phân phối chuẩn). Việc bổ sung hàng tức thời và tiêu thụ hàng diễn ra đều đặn theo thời gian. Hãy xác định lượng hàng cần mua mỗi lần và 1 lượng dự trữ bảo hiểm R sao cho khả năng thiếu hàng không lớn hơn α đủ nhỏ và tổng chi phí nhỏ nhất.

Như vậy, với việc bổ sung lượng dự trữ bảo hiểm R, sẽ đảm bảo thoả mãn nhu cầu tiêu thụ tại mọi thời điểm với mức tin cậy$(1 - \alpha)$ cho trước.

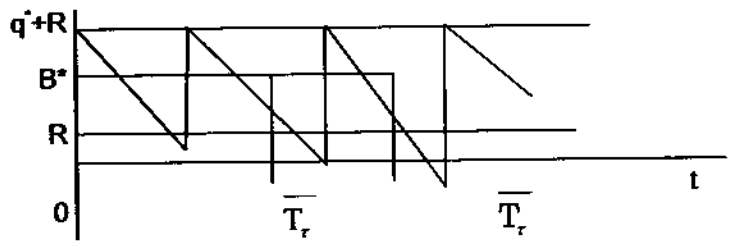
b. Thiết lập và phân tích mô hình

Gọi lượng hàng tiêu thụ trong thời gian τ là Q_τ thì Q_τ là một biến ngẫu nhiên. Để giải bài toán trong trường hợp này thay vì xét tính ngẫu nhiên của thời gian đặt hàng τ, ta xem như lượng hàng tiêu thụ trong thời gian đó là một biến ngẫu nhiên Q_τ, tuân theo một qui luật phân phối xác suất nào đó, với trung bình và phương sai hữu hạn. Giả sử ta biết qui luật phân phối của τ, vì việc tiêu thụ là đều đặn nên có thể suy ra qui luật phân phối của lượng hàng tiêu thụ Q_τ trong thời gian đặt hàng (thực tế):

$T_\tau = (\tau - t^*.\text{int}(\tau/t^*))$ là $F(Q_\tau)$, trong đó t^* là chu kỳ dự trữ - tiêu thụ tối ưu. Biến ngẫu nhiên Q_τ xác định theo công thức $Q_\tau = Q.T_\tau$. Nếu τ phân phối chuẩn thì Q_τ cũng phân phối chuẩn với trung bình là $Q \times M(T_\tau)$ và phương sai là $Q^2 \times D(T_\tau)$, trong đó $M(T_\tau)$, $D(T_\tau)$ là trung bình, phương sai của T_τ. Bài toán trên có thể xem là bài toán dự trữ theo mô hình Wilson cộng với việc xác định lượng dự trữ bảo hiểm R sao cho trong khoảng thời gian τ lượng hàng tiêu thụ Q_τ vượt quá $(B^* + R)$ với xác suất tối đa là α, đồng thời tổng chi phí bé nhất. Việc giải bài toán có thể chia thành hai bước như sau:

Trước tiên, giải bài toán Wilson với T_0 là trung bình của τ. Ta nhận được lượng hàng đặt mỗi lần q^*, thời gian một chu kỳ t^* và điểm đặt hàng B^* (B^* chính là điểm đặt hàng trung bình).

Với lượng dự trữ bảo hiểm là R thì có thể mô tả sơ đồ kho như sau:



Sau đó ta xác định R sao cho: $P(Q_r > B^* + R) < \alpha$. Theo hệ quả định lý cộng với hai biến cố đối lập ta có: $P(Q_r > B^* + R) < 1 - \alpha$.

Gọi phân vị mức 1 – α của phân phối $F(Q_r)$ là $F_{1-\alpha}$ (tức là $P(Q < F_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$) ta cần chọn R sao cho: $B^* + R > F_{1-\alpha}$ hay $R > F_{1-\alpha} - B^*$. Vì chúng ta muốn tổng chi phí (kể cả chi phí phát sinh cho dự trữ bảo hiểm R), do đó cần chọn lượng bảo hiểm tối thiểu R^* là:

$$R^* = F_{1-\alpha} - B^*$$

Trong trường hợp đó dự trữ trung bình trong kho sẽ là: $0,5q^* + R^*$ như vậy phát sinh hai khoản chi phí là chi phí mua lượng dự trữ bảo hiểm R^*: CR^* và chi phí dự trữ lượng bảo hiểm đó: ICR^*. Khi đó hàm tổng chi phí đạt giá trị nhỏ nhất:

$$N(q^*, R^*) = IC(q^* + R^*) + C(Q + R^*)$$

Thí dụ 5.13

Một cơ sở sản xuất xà phòng cần sử dụng mỗi năm 11,88 tấn xút, qui luật tiêu thụ đều theo thời gian, thời gian nhập kho không đáng kể. Chi phí mỗi lần đặt hàng 60$, giá mỗi tấn xút 850$, chi phí dự trữ bằng 10% giá mua. Thời gian đặt hàng là τ có phân phối chuẩn với trung bình là 60 ngày và độ lệch chuẩn là 1 ngày, với thời gian đó trung bình mỗi ngày cơ sở tiêu thụ là 33kg (33 = 11880/360) hay 1980kg trong 60 ngày và độ lệch chuẩn là 33kg (33 = 1×33). Với mức bảo hiểm có độ tin cậy 0,99, hãy xác định lượng dự trữ bảo hiểm sao cho tổn thất ít nhất, tính tổng chi phí đảm bảo dự trữ cho sản xuất.

Giải:

Trước hết, ta tính lượng hàng mua mỗi lần tối ưu: $q^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC}}$ q^* = 4095 (kg); từ đó ta có thời gian mỗi chu kỳ dự trữ - tiêu thụ là $t^* = q^*/Q = 0{,}341$(năm). Ta có điểm đặt hàng $B^* = 2000$(kg).

Với mức tin cậy 0,99 ta cần xác định lượng dự trữ $R^* = F_{0,99} - B^*$ hay $B^* + R^* > F_{0,99}$; trong đó $B^* + R$ phân phối chuẩn với trung bình là $M(B^* + R) = 33$kg/ngày × 60 ngày = 1980(kg), độ lệch chuẩn $\sigma_R = 33$.

Ta có $F_{0,99} = 1980 + U_{0,99}.\ 33 = 1980 + 2{,}32.33 = 2056{,}56$.

Vậy $R^* = 2056{,}56 - 2000 = 56{,}56$(kg).

Lượng dự trữ trung bình trong kho là:

$$2047{,}5 + 56{,}56 = 2104{,}06$$

Từ đó ta tính hàm tổng chi phí như sau:

$N(q^*,R^*) = IC(q^* + R^*) + C(Q + R^*)$

$= 0{,}1 \times 0{,}85(4095 + 56{,}56) + 0{,}85(11880 + 56{,}56) = 10151{,}3$$

Trên đây ta đã nghiên cứu một số mô hình quản lý dự trữ đơn giản, có rất nhiều vấn đề về tổ chức sản xuất kinh doanh có thể mô hình hoá theo cách thức như trên. Việc mô hình hoá và tìm các chiến lược có thể làm tương tự và có thể tìm các mô hình như vậy trong các tài liệu tham khảo.

Bài tập chương V

1. Một cửa hàng kinh doanh một mặt hàng điển tử, nhu cầu về mặt hàng này trong khu vực là 40000 đơn vị/năm. Giá mua mỗi đơn vị là 14$, chi phí bảo quản mỗi đơn vị tính tỷ lệ với giá mua theo hệ số 0,05. Chi phí cho mỗi lần liên hệ và hợp đồng mua hàng là 120$. Thời gian từ lúc bắt đầu làm hợp đồng đến khi có hàng về để bán là 3 tháng.

a. Tính lượng hàng đặt mỗi lần sao cho tổng chi phí bé nhất; xác định thời gian mỗi chu kỳ mua và tiêu thụ hàng; mức hàng còn lại trong kho vào thời điểm cần tiến hành làm thủ tục mua hàng cho chu kỳ sau.

b. Vẽ đồ thị minh hoạ và dựa vào đồ thị mô tả hành vi hợp lý của cửa hàng khi có hạ giá cho lô hàng lớn hơn hoặc bằng S_0.

c. Nếu cửa hàng nhận được một báo giá mới của một cơ sở khác với đơn giá 13,5$ nhưng tiền liên hệ và hoàn tất hợp đồng mua hàng mỗi lần là 125$ thì có nên lựa chọn mua ở cơ sở mới hay không?

2. Nhu cầu một mặt hàng đồ điện dân dụng tại một thị xã do một công ty thương mại cung ứng hàng năm là 30000 chiếc, giá mua mỗi chiếc 4$, chi phí dự trữ tính theo khối

lượng hàng lưu kho mỗi chiếc 6$/năm. Chi phí cho mỗi lần đặt hàng 50$. Việc tiêu thụ đều đặn và thời gian nhập hàng vào kho không đáng kể.

a. Xác định lượng hàng đặt mỗi lần tốt nhất và điểm đặt hàng tương ứng nếu thời gian đặt hàng là 3 tháng.

b. Giả sử cơ sở bán hàng muốn công ty mua với số lượng mỗi lô lớn hơn mức tính được ở câu a, cơ sở này dự định sẽ hạ giá hàng 10% cho lô hàng tối thiểu là S chiếc, nhưng lại muốn công ty mua mỗi lô có số lượng tối thiểu đó thì cần đặt S trong khoảng nào? Trong trường hợp đó, nếu công ty không mua mỗi lần lô hàng S thì sẽ chi một chi phí cơ hội là bao nhiêu?

3. Một cơ sở chế biến lương thực dự báo tổng nhu cầu nguyên liệu chính hàng năm là 120000 tấn. Việc tiêu thụ đều đặn và thời gian nhập hàng vào kho không đáng kể. Có hai phương thức mua nguyên liệu như sau:

Phương thức I: Mua mỗi đợt từ tổng công ty lương thực với số lượng tuỳ chọn giá mỗi tấn là 240$, chi phí bảo quản bằng 12% giá mua, chi phí giao dịch, tổ chức mua mỗi lần là 150$.

Phương thức II: Chia đều tổng nhu cầu thành 4 lần đặt mua, giá mỗi tấn sẽ là 225$ và chi phí bảo quản bằng 15% giá mua, chi phí giao dịch, tổ chức mua mỗi lần như phương thức I.

a. Nên mua theo phương thức nào, nếu định chiến lược sai thì thiệt hại tối thiểu là bao nhiêu?

b. Nếu tổng nhu cầu hàng năm tăng 10% và giá cả cũng tăng 10% còn chi phí giao dịch, tổ chức mua không đổi thì năm sau nên mua như thế nào?

4. Một trạm báo xăng mỗi tháng tiêu thụ 16000 kg, cường độ tiêu thụ đều và thời gian bổ sung xăng về bồn chứa có thể bỏ qua, chi phí cố định cho mỗi lần mua từ nhà cung cấp là 100$, giá mua từ nhà cung cấp 0,28$/kg, chi phí bảo quản gồm hai phần: Chi phí cố định mỗi tháng 320$ không phụ thuộc số lượng trong bồn chứa và chi phí tính cho mỗi kg mỗi tháng bằng 15% giá mua. Hãy cho biết các giá bán ra tối thiểu để trạm thu được từ mỗi kg số tiền lãi không dưới 0,02$; muốn đảm bảo mức lãi đó trạm cần dự trữ như thế nào?

5. Một người dự định mở một cửa hàng bán rượu, cơ sở tư vấn thương mại đã cung cấp các số liệu sau:

Tổng nhu cầu hàng năm trong khu vực do cửa hàng cung cấp là 14000 thùng. Giá mỗi thùng về đến cửa hàng là 144$, chi phí cho ký hợp đồng mua bán mỗi lần cố định là 100$, chi phí bảo quản và khoản lãi tiền gửi gộp hàng lại bằng 7% giá hàng (không tính chi phí hợp đồng mua bán).

Hãy xác định tổng số tiền tối thiểu cần có để người này có thể mua bán hàng, đáp ứng nhu cầu theo các dự báo nêu trên, biết cường độ tiêu thụ đều và thời gian nhập hàng không đáng kể. Thời gian từ khi làm hợp đồng đến khi có hàng là một tháng.

6. Với các dữ kiện của mô hình Wilson

a. Hãy tìm biểu thức cho biết khi tăng tổng nhu cầu, chi phí mua hàng và chi phí đặt hàng cùng mức 1% thì tổng chi phí nhỏ nhất tăng bao nhiêu %. Nhận xét gì về giá trị biểu thức này tại qui mô tối ưu, giải thích.

b. Giả sử hệ thống kho có sẵn với dung tích kho M_0 lớn hơn qui mô tối ưu trong mô hình. Vì vậy ngoài chi phí dự trữ tính

theo giá đã nêu trong mô hình mỗi đơn vị dung tích bỏ trống chịu một thiệt hại là p. Hãy nêu cách giải quyết có lợi nhất và minh hoạ bằng một thí dụ cụ thể.

7. Một cửa hàng bán lẻ lương thực bảo đảm lương thực cho một khu vực dân cư với tổng nhu cầu hàng năm là 60000 tấn. Chi phí cho mỗi lần tổ chức mua từ tổng công ty là 200$, giá mua mỗi tấn là 300$, chi phí bảo quản bằng 20% giá mua. Cửa hàng có một hệ thống kho với dùng tích M = M_0 tấn. Lượng hàng mỗi lần cửa hàng đang mua đúng bằng M_0.

a. Hiện tại người ta thấy rằng việc tăng dung tích kho là cần thiết, nhằm giảm tổng chi phí. Hãy xác định lượng giảm tổng chi phí khi tăng dùng tích kho theo M.

b. Nên tăng dung tích kho như thế nào để tiết kiệm nhất nếu như hệ số chi phí bảo quản với lô hàng mua mỗi lần trên mức M_0 bằng 22% giá mua (các điều kiện khác không thay đổi).

8. Nhu cầu một loại thuốc chữa bệnh thông thường hàng năm là 960000 hộp, một công ty dược dự định cung cấp số thuốc này từ một cơ sở sản xuất có công suất dự tính 1600000 hộp/năm. Chi phí cho mỗi đợt chuẩn bị sản xuất là 250$, chi phí sản xuất mỗi hộp là 12$, chi phí bảo quản bằng 20% chi phí sản xuất. Công ty có một kho đủ lớn để bảo quản, việc tiêu thụ coi như đều đặn và cường độ sản xuất trong mỗi kỳ không đổi. Trong năm đầu, công ty đã chia thành 6 đợt sản xuất bằng nhau và cung cấp vừa đủ nhu cầu. Kiểm tra thấy lượng thuốc qua kho là 500000 hộp.

Hãy xác định lại khả năng sản xuất của cơ sở trên và đặt kế hoạch sản xuất cho các năm sau với giả thiết các yếu tố khác không thay đổi.

Nếu có thể mua từ một nguồn khác với khả năng cung cấp không hạn chế, thời gian nhập hàng vào kho coi như không đáng kể, giá mua mỗi hộp 10$, chi phí giao dịch hoàn tất hợp đồng mỗi lần 400$ thì có nên mua hay không trong hai trường hợp :

- Không chịu khấu hao cơ sở sản xuất bị bỏ không.

- Mỗi năm không sản xuất khấu hao không phải chịu là 1000$.

9. Xét mô hình dự trữ xác định lượng hàng mua mỗi năm trong điều kiện nhu cầu Q phân phối chuẩn với trung bình và phương sai hữu hạn trong điều kiện tiêu thụ đều, bổ sung dần dần với các tham số Q, K, A, C, I như đã nêu.

a. Hãy xác định Q và tìm chiến lược đặt hàng có hàm chi phí nhỏ nhất tương ứng.

b. Nêu một thí dụ bằng số và giải bài toán cho 2 năm liên tiếp biết rằng nhu cầu tiêu thụ tăng α%/năm và năng lực sản xuất tăng β%/năm.

10. Một công ty kinh doanh xăm lốp ô tô có tổng nhu cầu 120000 bộ/năm. Công ty có thể mua ở hai nguồn với các điều kiện như sau:

Nguồn A: Tổng công suất sản xuất và cung ứng là 600000 bộ/năm. Cách thức cung cấp theo đợt với cường độ đều, chi phí cho mỗi lần đặt hàng là 200$. Giá mỗi bộ 140$. Thời gian từ lúc làm hợp đồng đến khi có hàng để bán là 15 ngày.

Nguồn B: Tổng công suất đủ lớn và thời gian cung ứng coi như không đáng kể. Giá hàng là 138$/bộ. Chi phí cho mỗi lần đặt hàng là 210$. Thời gian đặt hàng là 45 ngày.

Chi phí dự trữ tính theo số lượng dự trữ hiện vật là 2,5$/1 đơn vị.

a. Hãy chọn nơi mua hàng có tổng chi phí bé nhất và tính các kết quả tương ứng.

b. Giả sử các loại chi phí khác không thay đổi, hãy xác định giá cao nhất có thể của nguồn B mà công ty mua hàng ở nguồn đó.

11. Một cơ sở sản xuất và cung ứng cho thị trường loại phân bón A với tổng nhu cầu là 30000 tấn/năm. Cơ sở này có khả năng sản xuất hàng năm 40000 tấn một cách đều đặn, ngoài ra có thể mua ngoài sản phẩm cùng loại. Nếu tự sản xuất chi phí cho 1 tấn là 140$, nếu mua ngoài giá một tấn là 138$, giá bán là 160$/tấn. Trong trường hợp mua ngoài, cơ sở phải chịu một khoản thiệt hại do không sử dụng thiết bị là 20000$/năm. Hệ số chi phí dự trữ tính theo giá mua vào hoặc theo chi phí sản xuất là 10%. Chi phí đặt hàng khi mua ngoài là 150$ mỗi lần, và thời gian nhập hàng không đáng kể, còn chi phí chuẩn bị sản xuất mỗi lần là 100$. Cơ sở nên mua ngoài hay tự sản xuất và cung ứng? Mỗi lần mua hoặc sản xuất bao nhiêu để tổng lãi lớn nhất?

12. Một cơ sở kinh doanh máy tính đã dự báo tổng số máy có thể tiêu thụ là 2000 chiếc/năm. Việc tiêu thụ coi như đều đặn, tiền vốn có thể gửi ngân hàng với tổng lãi suất không kỳ hạn 10%/năm. Chi phí cho việc đặt mua mỗi lô hàng là 400$, giá mỗi máy (đã tính thuế nhập khẩu) là 620$. Chi phí bảo quản 1% giá máy. Thời gian từ lúc làm thủ tục nhập đến khi có máy về và được phép bán ra là 3 tháng.

a. Xác định cỡ lô hàng nhập mỗi lần sao cho tổng chi phí bé nhất.

b. Nếu bên cung cấp máy đặt giá khuyến mại cho lô hàng từ 500 máy trở lên 5% giá thì có nên thay đổi cỡ lô hàng mua mỗi lần không?

13. Một nhà in có tổng nhu cầu 120 tấn giấy/năm. Nhà in có thể mua giấy từ 1 cơ sở sản xuất có công suất đủ lớn. Chi phí cho một lần giao dịch mua hàng là 60$, giá mỗi tấn giấy 160$ nếu mua lô hàng dưới 10 tấn, 158$ nếu mua lô hàng từ 10 tấn trở lên. Chi phí bảo quản tính theo giá với hệ số 0,02.

a. Xác định cỡ lô hàng mua mỗi lần sao cho tổng chi phí bé nhất; mô tả kết quả trên đồ thị.

b. Nếu bên bán chào hàng với giá 155$/tấn đối với mỗi lô hàng 16 tấn thì theo bạn có nên mua theo lô này không?

14. Một công ty phát hành một mặt hàng văn hoá phẩm với nhu cầu thường xuyên, đều đặn. Mỗi lần tổ chức sản xuất phát sinh một chi phí cố định là 200$, chi phí trực tiếp cho mỗi đơn vị phụ thuộc lượng phát hành mỗi lần như sau: Nếu mỗi lần phát hành dưới 1000 đơn vị thì giá là 0,8$, từ 1000 đến 3000 giá là 0,72$, từ 3000 đến 5000 giá là 0,7$, từ 5000 trở lên giá là 0,85$, chi phí bảo quản tính theo giá với hệ số 5%.

Xác định lượng phát hành mỗi lần sao cho tổng chi phí nhỏ nhất, biết rằng tổng nhu cầu hàng năm là 25000 đơn vị.

15. Nhu cầu một loại hoá chất sản xuất phân bón là 8000 tấn/năm. Chi phí cho mỗi hợp đồng mua hàng là 50$. Hệ số chi phí dự trữ là 0,2; giá mỗi tấn phụ thuộc lượng mua mỗi lần q như sau:

Nếu $0 < q < 1000$ thì giá là 25$/tấn

Nếu $1000 \leq q < 3000$ thì giá là 24$/tấn

Nếu $q \geq 3000$ thì giá là 23,5$/tấn

Thời gian đặt hàng 90 ngày.

a. Xác định lượng hàng đặt tốt nhất; thời gian 1 chu kỳ và điểm đặt hàng tương ứng trong trường hợp bổ sung tức thời và tiêu thụ đều.

b. Giả sử việc tiêu thụ là đều đặn và bổ sung dần với cường độ 16000 tấn/năm. Hãy xác định lượng hàng mua mỗi lần tối ưu và tổng chi phí tương ứng.

16. Nhu cầu một loại hàng do một công ty đảm nhiệm cung cấp là 10000 tấn/năm. Cường độ nhu cầu đều đặn, chi phí cho mỗi đợt tổ chức mua là 100$, chi phí cho mỗi tấn phụ thuộc qui mô mua mỗi đợt (M) như sau: 25$ nếu $M < 1000$ tấn; 24$ nếu $1000 \text{ tấn} \le M < 5000$ tấn; 23,5$ nếu $M \ge 5000$ tấn.

Chi phí bảo quản bằng 15% giá hàng.

a. Xác định lượng hàng mua mỗi lần sao cho tổng chi phí nhỏ nhất; vẽ đồ thị minh hoạ kết quả trên.

b. Giả sử công ty đã mua theo qui mô tối ưu tìm được ở câu a, khi giá hàng tăng 1% còn mọi chi phí khác không đổi, công ty dự định giảm qui mô mua mỗi lần 1%. Dự định này có duy trì được chiến lược tối ưu không? Nếu thực hiện dự định này tổng chi phí chênh lệch so với tổng chi phí mua theo qui mô cũ là bao nhiêu? So với tổng chi phí thấp nhất có thể là bao nhiêu?

17. Một cơ sở kinh doanh loại hàng A, thông thường mỗi lô hàng nhập trong khoảng 100 tấn đến 500 tấn, giá mỗi tấn 12$, chi phí bảo quản mỗi tấn 2$/năm, chi phí đặt hàng mỗi lần 120$ và thời gian đặt hàng là 3 tháng. Vì một lý do nào đó cơ sở này muốn thay đổi lượng nhập mỗi lần, bên bán đưa ra thêm các phương án:

Nếu mỗi lần mua từ 500 tấn trở lên thì giá mỗi tấn giảm 5%; ngược lại nếu mua dưới 100 tấn mỗi lần thì giá mỗi lần tăng 10%; nếu chỉ mua mỗi năm một lần với khối lượng từ 1500 tấn trở lên thì giá mỗi tấn là 10$.

Hãy chọn phương án mua có lợi nhất và tính các chỉ tiêu có liên quan đến việc dữ trữ, tiêu thụ. Biết rằng nhu cầu hàng năm là 20000 tấn và việc tiêu thụ coi như đều đặn, thời gian nhập hàng không đáng kể.

18. Nhu cầu than cho một nhà máy nhiệt điện là 500 tấn/năm. Việc tiêu thụ đều đặn và bổ sung tức thời. Chi phí cho mỗi lần làm hợp đồng là 60$; hệ số chi phí dự trữ là 0,05. Giá mỗi tấn than thay đổi theo số lượng mỗi hợp đồng q như sau:

Nếu $0 < q < 100$	thì giá là 120$/tấn
Nếu $100 \leq q < 200$	thì giá là 110$/tấn
Nếu $q \geq 200$	thì giá là 105$/tấn

Hãy mô hình hoá bài toán trên dưới dạng một bài toán dự trữ và giải bài toán đó. Mô tả kết quả trên đồ thị.

19. Một chương trình được sử dụng tổng số vốn 1200000$/năm. người ta có thể đem số vốn này mua bán trái phiếu. Chi phí cho mỗi lần mua bán một trái phiếu là 20$. Lãi suất trái phiếu là 0,05%/năm nếu trái phiếu có mệnh giá nhỏ hơn 10000$, lãi suất là 0,08%/năm nếu trái phiếu có mệnh giá từ 10000 đến 50000$ và từ 50000$ trở lên lãi suất là 0,1%/năm. Hãy mô hình hoá bài toán này thành một mô hình dự trữ và xác định một chiến lược dùng tiền mặt có lợi nhất.

20. Một khách sạn dự báo trong mỗi năm tiêu thụ hết 40000 thùng rượu cùng loại. Việc tiêu thụ coi như đều đặn và

việc nhập hàng mất một thời gian không đáng kể. Chi phí bảo quản tính theo giá với hệ số 0,05% năm; giá mỗi thùng rượu 160$ nếu mua ít hơn 100 thùng mỗi lần; giá 155$ nếu mua từ 100 đến 1000 thùng mỗi lần; nếu mua từ 1000 thùng trở lên mỗi lần giá là 150$. Thời gian đặt hàng 2 tháng; chi phí một lần đặt hàng là 180$.

a. Xác định số thùng rượu cần mua mỗi lần sao cho tổng chi phí bé nhất; tính điểm đặt hàng tương ứng.

b. Nếu nhà nước có quyết định đánh thuế 20% trên giá mua vào, nhưng hệ số chi phí bảo quản vẫn tính với giá chưa tính thuế thì có cần thay đổi lượng hàng mua mỗi lần không?

21. Một cơ sở cần sử dụng một loại vật liệu phụ cho sản xuất; loại vật liệu này có thể mua ở 2 nguồn khác nhau:

Nguồn I: Chi phí mỗi hợp đồng 400000đồng; giá 12000đồng/kg; thời gian đặt hàng 45 ngày, bổ sung hàng dần với cường độ 12 tấn/năm.

Nguồn II: Chi phí mỗi hợp đồng 600000đồng; giá 11000đồng/kg nếu mua ít hơn 1000kg mỗi lần và 10500đồng/kg nếu mua từ 1000kg trở lên. Thời gian đặt hàng 60 ngày, bổ sung hàng mất thời gian không đáng kể.

Tổng nhu cầu trong mỗi năm là 8 tấn, chi phí dự trữ có hệ số 0,1 và giả sử tiêu thụ đều đặn trong năm. Hãy xác định nguồn mua có lợi hơn và tổng chi phí tương ứng.

22. Một nhà máy đường có tổng nhu cầu bán thành phẩm từ mía, mỗi năm là 500000tấn.

Nhà máy có thể mua bán thành phẩm theo 1 trong 2 phương thức:

Phương thức thứ nhất là mỗi lần mua một khối lượng nào đó với giá không đổi bên bán thoả thuận là 125$/tấn. Chi phí cố định giao dịch là 20$ cho 1 lần.

Phương thức thứ hai là mua theo mùa giá sẽ là 120$/tấn ở đầu tháng 1 và 132$/tấn ở đầu tháng 7, mỗi lần mua đủ cho 6 tháng sản xuất. Chi phí cố định cho giao dịch 1 lần là 45$.

Chi phí bảo quản bằng 5% giá mua. Hãy chọn cách mua sao cho tổng chi phí nhỏ nhất.

23. Một cửa hàng bán lẻ bột giặt tại khu vực A, dự báo nhu cầu hàng năm của khu vực trung bình là 2000 tấn, độ lệch tiêu chẩn là 40 tấn. Giá mua từ cơ sở sản xuất là 900$/tấn, giá bán lẻ là 950$/tấn, mỗi lần dư thừa so với nhu cầu bán với giá 850$, việc không đáp ứng nhu cầu chịu một khoản thiệt hại tính cho mỗi tấn thiếu hụt là 60$.

Hãy xác định lượng mua cần thiết trong năm sao cho tổng lãi trung bình lớn nhất; tính tổng lãi trung bình lớn nhất tương ứng; giả sử nhu cầu là đại lượng ngẫu nhiên phân phối chuẩn.

24. Nhu cầu một loại đèn chiếu sáng dùng để thay thế trong một thành phố là đại lượng phân phối Poát-xông dừng với trung bình 1200 bóng/năm. Mỗi cửa hàng nhận cung cấp loại bóng này với giá mua mỗi bóng là 42$, mỗi bóng bán ra với giá 45$, số bóng thừa sang năm sau chỉ bán được với giá 39$, nếu nhu cầu không được đáp ứng cửa hàng phải chịu phạt 10$.

a. Xác định lượng bóng cửa hàng cần mua mỗi năm sao cho tổng lãi trung bình lớn nhất, tính lãi tương ứng.

b. Nếu có thêm thông tin về chi phí cố định mỗi lần mua

hàng là 400$, thuế doanh thu 12%, chi phí bảo quản dự trữ bằng 5% giá mua cộng các chi phí khác cho mỗi bóng thì cần mua mỗi năm bao nhiêu và mua như thế nào?

25. Một xí nghiệp bánh kẹo qua điều tra đã dự báo tổng lượng hàng có thể tiêu thu trong năm là một đại lượng ngẫu nhiên phân phối chuẩn có trùng bình 650 tấn với độ lệch tiêu chuẩn là 40 tấn. Chi phí sản xuất mỗi tấn là 15 triệu, giá bán mỗi tấn là 16,5 triệu. Lượng hàng thừa so với nhu cầu chỉ bán được trong 1 tháng cuối năm hết khoảng 30% với việc hạ giá 10%, phần còn lại cơ quan vệ sinh thực phẩm bắt huỷ toàn bộ; mặt khác việc không đảm bảo nhu cầu gây thiệt hại ước tính 2 triệu /tấn.

a. Xác định lượng bánh kẹo cần sản xuất sao cho tổng lãi trung bình cao nhất.

b. Nếu số hàng thừa bị huỷ hoàn toàn thì cần sản xuất bao nhiêu trong năm?

26. Nhu cầu một loại thuốc tiêm phòng là một đại lượng ngẫu nhiên tuân theo qui luật chuẩn, dự báo nhu cầu trong mỗi kỳ hạn sản xuất bảo quản cần trung bình là 15000 đơn vị, sai lệch tiêu chuẩn là 120 đơn vị. Giá thành mỗi đơn vị là 15$; mỗi đơn vị thuốc được dùng mang lại lợi ích trung bình 10$; lượng thuốc thừa phải huỷ hoàn toàn, nếu thiếu phải mua từ một nguồn khác với giá 30$. Xác định lượng thuốc cần sản xuất trong mỗi kỳ có lợi nhất.

27. Tổng công ty mía đường dự báo lượng đường tiêu thụ cho các nhu cầu hàng năm của mỗi người dân như một đại lượng ngẫu nhiên phân phối chuẩn với trung bình là 6,5kg; độ lệch chuẩn là 0,4kg; giá thành đường tiêu thụ chuẩn trong

nước là 4400 đồng/kg. Giá bán đến các cơ sở bán lẻ là 5200 đồng/kg; lượng đường thiếu phải nhập ngoài với giá 5500 đồng/kg; nếu sản xuất dư thừa phải chuyển đổi cho nhu cầu khác với giá 4000 đồng/kg. Với tổng số dân 72 triệu người có thể đặt kế hoạch sản xuất cho tiêu thụ của dân cư bao nhiêu để lãi trung bình từ thị trường này lớn nhất.

28. Nhu cầu sử dụng công nhân sản xuất chính của một cơ sở sản xuất là một đại lượng ngẫu nhiên phân phối chuẩn với trung bình là 1250 người, thực tế thời điểm ít nhất là 980 người và thời điểm cao nhất cần đến 1520 người. Mỗi công nhân làm việc 1 năm mang lại cho cơ sở này một khoản lãi là 2400$; tiền lương 70% khi không có việc cho mỗi công nhân qui đổi theo năm là 960$. Tiền trả thuê công nhân của cơ sở khác khi khối lượng công việc lớn hơn khả năng của cơ sở bằng 1,2 lần tiền lương định mức trả cho công nhân. Hãy xác định số lượng công nhân sản xuất chính của cơ sở này sao cho tổng lãi nhận được từ khâu này là lớn nhất.

29. Hãy xác định khối lượng một loại xăng cần dự trữ đảm bảo cho 95% nhu cầu của các ngành sản xuất vật chất, biết rằng mỗi năm lượng tiêu thụ loại xăng này là 365000 tấn. Việc tiêu thụ có thể xem là đều đặn và thời gian nhập kho không đáng kể; chi phí cho mỗi lần hoàn tất thủ tục nhập là 1000$. Giá mỗi tấn là 345$, chi phí dự trữ bằng 20% giá mua. Thời gian từ lúc làm thủ tục mua đến khi có xăng cho tiêu dùng là đại lượng ngẫu nhiên với trung bình là 120 ngày, sai số tiêu chuẩn là 15 ngày. Tính lượng xăng thiếu trung bình tương ứng với lời giải của bài toán.

30. Nhu cầu một loại thuốc trừ sâu cho 1 vùng là 12000 lít/tháng. Chi phí cho mỗi lần đặt mua là 120$, giá

mua mỗi lít là 11$ nếu mua dưới 1500 lít một lần, 10$ nếu mua từ 1500 lít đến dưới 5000 lít một lần, 9,5$ nếu mua từ 5000 lít một lần; chi phí dự trữ bằng 25% giá mua. Thời gian từ lúc đặt mua đến khi có hàng để bán tuân theo qui luật chuẩn với trung bình 12 ngày và độ lệch tiêu chuẩn 4 ngày. Với xác suất 99% hãy xác định lượng mua cần thiết có tổng chi phí nhỏ nhất. Nếu người bán muốn có lãi tối thiểu là 5% thì cần bán với giá tối thiểu là bao nhiêu?

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Giáo trình các phương pháp toán kinh tế. Đại học kinh tế Quốc dân. 1987.

2. Nguyễn Cao Văn – Trần Thái Ninh: Giáo trình lý thuyết xác suất và thống kê toán. NXB Khoa học và kỹ thuật. 1996.

3. Hoàng Tụy: Phân tích hệ thống và ứng dụng. NXB KH KT. 1987.

4. A. T. Ventxel: Giáo trình lý thuyết xác suất và quá trình ngẫu nhiên. NXB Đại học và THCN. 1987.

5. T. A. Caatu: Lý thuyết phục vụ công cộng và ứng dụng (Bản tiếng nga). 1971.

6. Fredic S.Mishkin: The economics of Money, Banking and Financial Markets. Harper Collins. 1992.

7. Alpha.C.Chiang: Fundamental methods of mathematical economics. McGraw-Hill book company – Singapore, 1985.

8. Ernest F.Haeusseler.Jr - Richard S.Paul: Introductory mathematical analysis. Prentice - Hall Interational, Inc.

9. Trần Túc: Giáo trình Qui hoạch tuyến tính. NXB KHKT, Hà Nội. 2000.

10. Ngô Văn Thứ: Mô hình toán ứng dụng. NXB KHKT. Hà Nội. 2005.

CÁC BẢNG SỐ

Bảng giá trị phân phối Poát xông

k a	0.05		0.1		0.15		0.2	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.9512	0.9512	0.9048	0.9048	0.8607	0.8607	0.8187	0.8187
1	0.0476	0.9988	0.0905	0.9953	0.1291	0.9898	0.1637	0.9825
2	0.0012	1	0.0045	0.9998	0.0097	0.9995	0.0164	0.9989
3	2E-05	1	0.0002	1	0.0005	1	0.0011	0.9999

	0.25		0.3		0.35		0.4	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.7788	0.7788	0.7408	0.7408	0.7047	0.7047	0.6703	0.6703
1	0.1947	0.9735	0.2222	0.9631	0.2466	0.9513	0.2681	0.9384
2	0.0243	0.9978	0.0333	0.9964	0.0432	0.9945	0.0536	0.9921
3	0.002	0.9999	0.0033	0.9997	0.005	0.9995	0.0072	0.9992
4	0.0001	1	0.0003	1	0.0004	1	0.0007	0.9999

k a	0.25		0.3		0.35		0.4	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.6376	0.6376	0.6065	0.6065	0.5769	0.5769	0.5488	0.5488
1	0.2869	0.9246	0.3033	0.9098	0.3173	0.8943	0.3293	0.8781
2	0.0646	0.9891	0.0758	0.9856	0.0873	0.9815	0.0988	0.9769
3	0.0097	0.9988	0.0126	0.9982	0.016	0.9957	0.0198	0.9966
4	0.0011	0.9999	0.0016	0.9998	0.0022	0.9975	0.003	0.9996
5	1E-04	1	0.0002	1	0.0002	0.9997	0.0004	1

	0.65		0.7		0.75		0.8	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.522	0.522	0.4966	0.4966	0.4724	0.4724	0.4493	0.4493
1	0.3393	0.8614	0.3476	0.8442	0.3543	0.8266	0.3595	0.8088
2	0.1103	0.9717	0.1217	0.9659	0.1329	0.9595	0.1438	0.9526
3	0.0239	0.9956	0.0284	0.9942	0.0332	0.9927	0.0383	0.9909
4	0.0039	0.9994	0.005	0.9992	0.0062	0.9989	0.0077	0.9986
5	0.0005	0.9999	0.0007	0.9999	0.0009	0.9999	0.0012	0.9989
6	5E - 05	1	8E - 05	1	0.0001	1	0.0002	1

k a	0.65		0.7		0.75		0.8	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.4274	0.4274	0.4066	0.4066	0.3867	0.3867	0.3679	0.3679
1	0.3633	0.7907	0.3659	0.7725	0.3674	0.7541	0.3679	0.7358
2	0.1544	0.9451	0.1647	0.9371	0.1745	0.9287	0.1839	0.9197
3	0.0437	0.9889	0.0494	0.9865	0.0553	0.9839	0.0613	0.981
4	0.0093	0.9982	0.0111	0.9977	0.0131	0.9971	0.0153	0.9963
5	0.0016	0.9997	0.002	0.9997	0.0025	0.9995	0.0031	0.9994
6	0.0002	1	0.0003	1	0.0004	0.9999	0.0005	0.9999
7	3E - 05	1	4E - 05	1	5E - 05	1	7E - 05	1

k a	1.05		1.1		1.15		1.2	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.3499	0.3499	0.3329	0.3329	0.3166	0.3166	0.3012	0.3012
1	0.3674	0.7174	0.3662	0.699	0.3641	0.6808	0.3614	0.6626
2	0.1929	0.9103	0.2014	0.9004	0.0294	0.8901	0.2169	0.8795
3	0.0675	0.9778	0.0738	0.9743	0.0803	0.9704	0.0867	0.9662
4	0.0177	0.9955	0.0203	0.9964	0.0231	0.9935	0.026	0.9923
5	0.0037	0.9992	0.0045	0.999	0.0053	0.9988	0.0062	0.9985
6	0.0007	0.9999	0.0008	0.9999	0.001	0.9998	0.0012	0.9997
7	1E – 04	1	0.0001	1	0.0002	1	0.0002	1
8	1E – 05	1	2E - 05	1	2E - 05	1	3E - 05	1

k a	1.25		1.3		1.35		1.4	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.2865	0.2865	0.2725	0.2725	0.2592	0.2592	0.2466	0.2466
1	0.3581	0.6446	0.3543	0.6268	0.4949	0.7541	0.3452	0.5981
2	0.2238	0.8586	0.2303	0.8571	0.1745	0.9287	0.2417	0.8335
3	0.0933	0.9617	0.0998	0.9569	0.0553	0.9839	0.1128	0.9463
4	0.0291	0.9909	0.0324	0.9893	0.0313	0.9971	0.0395	0.9857
5	0.0073	0.9982	0.0084	0.9978	0.0025	0.9995	0.0111	0.9968
6	0.0015	0.9997	0.0018	0.9996	0.0004	0.9999	0.0026	0.9994
7	0.0003	1	0.0003	0.9999	5E - 05	1	0.0005	0.9999
8	4E - 05	1	6E - 05	1	6E - 06	1	9E - 05	1

k a	1.05		1.1		1.15		1.2	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.3499	0.3499	0.3329	0.3329	0.3166	0.3166	0.3012	0.3012
1	0.3674	0.7174	0.3662	0.699	0.3641	0.6808	0.3614	0.6626
2	0.1929	0.9103	0.2014	0.9004	0.0294	0.8901	0.2169	0.8795
3	0.0675	0.9778	0.0738	0.9743	0.0803	0.9704	0.0867	0.9662
4	0.0177	0.9955	0.0203	0.9964	0.0231	0.9935	0.026	0.9923
5	0.0037	0.9992	0.0045	0.999	0.0053	0.9988	0.0062	0.9985
6	0.0007	0.9999	0.0008	0.9999	0.001	0.9998	0.0012	0.9997
7	1E – 04	1	0.0001	1	0.0002	1	0.0002	1
8	1E – 05	1	2E - 05	1	2E - 05	1	3E - 05	1

k a	1.25		1.3		1.35		1.4	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.2865	0.2865	0.2725	0.2725	0.2592	0.2592	0.2466	0.2466
1	0.3581	0.6446	0.3543	0.6268	0.4949	0.7541	0.3452	0.5981
2	0.2238	0.8586	0.2303	0.8571	0.1745	0.9287	0.2417	0.8335
3	0.0933	0.9617	0.0998	0.9569	0.0553	0.9839	0.1128	0.9463
4	0.0291	0.9909	0.0324	0.9893	0.0313	0.9971	0.0395	0.9857
5	0.0073	0.9982	0.0084	0.9978	0.0025	0.9995	0.0111	0.9968
6	0.0015	0.9997	0.0018	0.9996	0.0004	0.9999	0.0026	0.9994
7	0.0003	1	0.0003	0.9999	5E - 05	1	0.0005	0.9999
8	4E - 05	1	6E - 05	1	6E - 06	1	9E - 05	1

k a	1.45		1.5		1.55		1.6	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.2346	0.2346	0.2231	0.2231	0.2122	0.2122	0.2019	0.2019
1	0.3401	0.5747	0.3347	0.5578	0.329	0.5412	0.323	0.5249
2	0.2466	0.8213	0.251	0.8088	0.255	0.7962	0.2584	0.7834
3	0.1192	0.9405	0.1255	0.9344	0.1317	0.9279	0.1378	0.9212
4	0.0432	0.9837	0.0471	0.9814	0.051	0.979	0.0551	0.9763
5	0.0125	0.9962	0.0141	0.9955	0.0158	0.9948	0.0176	0.994
6	0.003	0.9992	0.0035	0.9991	0.0041	0.9989	0.0047	0.9987
7	0.0006	0.9999	0.0008	0.9998	0.0009	0.9998	0.0011	0.9997
8	0.0001	1	0.0001	1	0.0002	1	0.0002	1

k a	1.65		1.7		1.75		1.8	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.192	0.192	0.1827	0.1827	0.1738	0.1738	0.1653	0.1653
1	0.3169	0.5089	0.3106	0.4932	0.3041	0.4779	0.2975	0.4628
2	0.2614	0.7704	0.264	0.7572	0.2661	0.744	0.2678	0.7306
3	0.1438	0.9141	0.1496	0.9068	0.1552	0.8992	0.1607	0.8913
4	0.0593	0.9735	0.0636	0.9704	0.0679	0.9671	0.0723	0.9636
5	0.0196	0.993	0.0216	0.992	0.0238	0.9909	0.026	0.9896
6	0.0054	0.9984	0.0061	0.9981	0.0069	0.9978	0.0078	0.9974
7	0.0013	0.9997	0.0015	0.9996	0.0017	0.9995	0.002	0.9994
8	0.0003	0.9999	0.0003	0.9999	0.0004	0.9999	0.0005	0.9999

k a	1.85		1.9		1.95		2	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.1572	0.1572	0.1496	0.1496	0.1423	0.1423	0.1353	0.1353
1	0.2909	0.4481	0.2842	0.4337	0.2774	0.4197	0.2707	0.406
2	0.2691	0.7172	0.27	0.7037	0.2705	0.6902	0.2707	0.6767
3	0.1659	0.8831	0.171	0.8747	0.1758	0.866	0.1804	0.8571
4	0.0767	0.9599	0.0812	0.9559	0.0857	0.9517	0.0902	0.9473
5	0.0284	0.9883	0.0309	0.9868	0.0334	0.9852	0.0361	0.9834
6	0.0088	0.997	0.0098	0.9966	0.0109	0.996	0.012	0.9955
7	0.0023	0.9993	0.0027	0.9992	0.003	0.9991	0.0034	0.9989
8	0.0005	0.9999	0.0006	0.9998	0.0007	0.9998	0.0009	0.9998

k a	2.05		2.1		2.15		2.2	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.1287	0.1287	0.1225	0.1225	0.1165	0.1165	0.1108	0.1108
1	0.2639	0.3926	0.2572	0.3796	0.2504	0.3669	0.2438	0.3546
2	0.2705	0.6631	0.27	0.6496	0.2692	0.6361	0.2681	0.6227
3	0.1848	0.848	0.189	0.8386	0.1929	0.8291	0.1966	0.8194
4	0.0947	0.9427	0.0992	0.9379	0.1037	0.9328	0.1082	0.9275
5	0.0388	0.9816	0.0417	0.9796	0.0446	0.9774	0.0476	0.9751
6	0.0133	0.9948	0.0146	0.9941	0.016	0.9934	0.0174	0.9925
7	0.0039	0.9987	0.0044	0.9985	0.0049	0.9983	0.0055	0.998
8	0.001	0.9997	0.0011	0.9997	0.0013	0.9996	0.0015	0.9995
9	0.0002	0.9999	0.0003	0.9999	0.0003	0.9999	0.0004	0.9999

k a	2.25		2.3		2.35		2.4	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.1054	0.1054	0.1003	0.1003	0.0954	0.0954	0.0907	0.0907
1	0.2371	0.3425	0.2306	0.3309	0.2241	0.3195	0.2177	0.3084
2	0.2668	0.6093	0.2652	0.596	0.2633	0.5828	0.2613	0.5697
3	0.2001	0.8094	0.2033	0.7993	0.2063	0.7891	0.209	0.7787
4	0.1126	0.922	0.1169	0.9162	0.1212	0.9103	0.1254	0.9041
5	0.0506	0.9726	0.0538	0.97	0.057	0.9673	0.0602	0.9643
6	0.019	0.9916	0.0206	0.9906	0.0223	0.9896	0.0241	0.9884
7	0.0061	0.9977	0.0068	0.9974	0.0075	0.9971	0.0083	0.9967
8	0.0017	0.9994	0.0019	0.9994	0.0022	0.9993	0.0025	0.9991
9	0.0004	0.9999	0.0005	0.9999	0.0006	0.9998	0.0007	0.9998
10	1E-04	1	0.0001	1	0.0001	1	0.0002	1

k a	2.45		2.5		2.55		2.6	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.0863	0.0863	0.0821	0.0821	0.0781	0.0781	0.0743	0.0743
1	0.2114	0.2977	0.2052	0.2873	0.1991	0.2772	0.1931	0.2674
2	0.259	0.5567	0.2565	0.5438	0.2539	0.5311	0.251	0.5184
3	0.2115	0.7682	0.2138	0.7576	0.2158	0.7468	0.2176	0.736
4	0.1295	0.8978	0.1336	0.8912	0.1376	0.8844	0.1414	0.8774
5	0.0635	0.9612	0.0668	0.958	0.0702	0.9546	0.0735	0.951
6	0.0259	0.9872	0.0278	0.9858	0.0298	0.9844	0.0319	0.9828
7	0.0091	0.9962	0.0099	0.9958	0.0109	0.9952	0.0118	0.9947
8	0.0028	0.999	0.0031	0.9989	0.0035	0.9987	0.0038	0.9985
9	0.0008	0.9998	0.0009	0.9997	0.001	0.9997	0.0011	0.9996
10	0.0002	0.9999	0.0002	0.9999	0.0003	0.9999	0.0003	0.9999

k a	1.85		1.9		1.95		2	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.1572	0.1572	0.1496	0.1496	0.1423	0.1423	0.1353	0.1353
1	0.2909	0.4481	0.2842	0.4337	0.2774	0.4197	0.2707	0.406
2	0.2691	0.7172	0.27	0.7037	0.2705	0.6902	0.2707	0.6767
3	0.1659	0.8831	0.171	0.8747	0.1758	0.866	0.1804	0.8571
4	0.0767	0.9599	0.0812	0.9559	0.0857	0.9517	0.0902	0.9473
5	0.0284	0.9883	0.0309	0.9868	0.0334	0.9852	0.0361	0.9834
6	0.0088	0.997	0.0098	0.9966	0.0109	0.996	0.012	0.9955
7	0.0023	0.9993	0.0027	0.9992	0.003	0.9991	0.0034	0.9989
8	0.0005	0.9999	0.0006	0.9998	0.0007	0.9998	0.0009	0.9998

k a	2.05		2.1		2.15		2.2	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.1287	0.1287	0.1225	0.1225	0.1165	0.1165	0.1108	0.1108
1	0.2639	0.3926	0.2572	0.3796	0.2504	0.3669	0.2438	0.3546
2	0.2705	0.6631	0.27	0.6496	0.2692	0.6361	0.2681	0.6227
3	0.1848	0.848	0.189	0.8386	0.1929	0.8291	0.1966	0.8194
4	0.0947	0.9427	0.0992	0.9379	0.1037	0.9328	0.1082	0.9275
5	0.0388	0.9816	0.0417	0.9796	0.0446	0.9774	0.0476	0.9751
6	0.0133	0.9948	0.0146	0.9941	0.016	0.9934	0.0174	0.9925
7	0.0039	0.9987	0.0044	0.9985	0.0049	0.9983	0.0055	0.998
8	0.001	0.9997	0.0011	0.9997	0.0013	0.9996	0.0015	0.9995
9	0.0002	0.9999	0.0003	0.9999	0.0003	0.9999	0.0004	0.9999

k a	2.65		2.7		2.75		2.8	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.0707	0.0707	0.0672	0.0672	0.0639	0.0639	0.0608	0.0608
1	0.1872	0.2579	0.1815	0.2487	0.1758	0.2397	0.1703	0.2311
2	0.2481	0.506	0.245	0.4936	0.2417	0.4815	0.2384	0.4695
3	0.2191	0.7251	0.2205	0.7141	0.2216	0.703	0.2225	0.6919
4	0.1452	0.8703	0.1488	0.8629	0.1523	0.8554	0.1557	0.8477
5	0.0769	0.9472	0.0804	0.9433	0.0838	0.9392	0.0872	0.9349
6	0.034	0.9812	0.0362	0.9794	0.0384	0.9776	0.0407	0.9756
7	0.0129	0.994	0.0139	0.9934	0.0151	0.9927	0.0163	0.9919
8	0.0043	0.9983	0.0047	0.9981	0.0052	0.9978	0.0057	0.9976
9	0.0013	0.9996	0.0014	0.9995	0.0016	0.9994	0.0018	0.9993
10	0.0003	0.9999	0.0004	0.9999	0.0004	0.9999	0.0005	0.9998
11	8E-05	1	9E-05	1	0.0001	1	0.0001	1

k a	2.85		2.9		2.95		3	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.0578	0.0578	0.055	0.055	0.0523	0.0523	0.0489	0.0498
1	0.1649	0.2227	0.1596	0.2146	0.1544	0.2067	0.1494	0.1991
2	0.2349	0.4576	0.2314	0.446	0.2277	0.4345	0.224	0.4232
3	0.2232	0.6808	0.2237	0.6696	0.2239	0.6584	0.224	0.6472
4	0.159	0.8398	0.1622	0.8381	0.1652	0.8236	0.168	0.8153
5	0.0906	0.9304	0.094	0.9258	0.0974	0.921	0.1008	0.9161
6	0.0431	0.9735	0.0455	0.9713	0.0479	0.9689	0.0504	0.9665
7	0.0175	0.991	0.0188	0.9901	0.0202	0.9891	0.0216	0.9881
8	0.0062	0.9973	0.0068	0.9969	0.0074	0.9966	0.0081	0.9962
9	0.002	0.9992	0.0022	0.9991	0.0024	0.999	0.0027	0.9989
10	0.0006	0.9998	0.0006	0.9998	0.0007	0.9997	0.0008	0.9997
11	0.0001	1	0.0002	0.9999	0.0002	0.9999	0.0002	0.9999

k a	3.05		3.1		3.15		3.2	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.0474	0.0474	0.045	0.045	0.0429	0.0429	0.0408	0.0408
1	0.1444	0.1918	0.1397	0.1847	0.135	0.1778	0.1304	0.1712
2	0.2203	0.4121	0.2165	0.4012	0.2126	0.3904	0.2087	0.3799
3	0.2239	0.636	0.2237	0.6248	0.2232	0.6137	0.2226	0.6025
4	0.1708	0.8068	0.1733	0.7982	0.1758	0.7895	0.1781	0.7806
5	0.1042	0.911	0.1075	0.9057	0.1108	0.9002	0.114	0.8946
6	0.053	0.9639	0.0555	0.9612	0.0581	0.9584	0.0608	0.9554
7	0.0231	0.987	0.0246	0.9858	0.0262	0.9845	0.0278	0.9832
8	0.0088	0.9958	0.0095	0.9953	0.0103	0.9948	0.0111	0.9943
9	0.003	0.9988	0.0033	0.9986	0.0036	0.9984	0.004	0.9982
10	0.0009	0.9997	0.001	0.9996	0.0011	0.9996	0.0013	0.9995
11	0.0003	0.9999	0.0003	0.9999	0.0003	0.9999	0.0004	0.9999

k a	3.25		3.3		3.35		3.4	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.0388	0.0388	0.0369	0.0369	0.0351	0.0351	0.0334	0.0334
1	0.126	0.1648	0.1217	0.1586	0.1175	0.1562	0.1135	0.1468
2	0.2048	0.3696	0.2008	0.3594	0.1969	0.3495	0.1929	0.3397
3	0.2218	0.5914	0.2209	0.5803	0.2198	0.5693	0.2186	0.5584
4	0.1802	0.7717	0.1823	0.7626	0.1841	0.7534	0.1858	0.7442
5	0.1172	0.8888	0.1203	0.8829	0.1234	0.8768	0.1264	0.8705
6	0.0635	0.9523	0.0663	0.949	0.0689	0.9457	0.0716	0.9421
7	0.0295	0.9817	0.0312	0.9802	0.033	0.9786	0.0348	0.9769
8	0.012	0.9937	0.0129	0.9931	0.0138	0.9924	0.0148	0.9917
9	0.0043	0.998	0.0047	0.9978	0.0051	0.9976	0.0056	0.9973
10	0.0014	0.9994	0.0016	0.9994	0.0017	0.9993	0.0019	0.9992
11	0.0004	0.9999	0.0005	0.9998	0.0005	0.9998	0.0006	0.9998

k a	3.45		3.5		3.55		3.6	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.0317	0.0317	0.0302	0.0302	0.0287	0.0287	0.0273	0.0273
1	0.1095	0.1413	0.1057	0.1359	0.102	0.1307	0.0984	0.1257
2	0.1889	0.3302	0.185	0.3208	0.181	0.3117	0.1771	0.3027
3	0.2173	0.5475	0.2158	0.5366	0.2142	0.5259	0.2125	0.5152
4	0.1874	0.7349	0.1888	0.7254	0.1901	0.716	0.1912	0.7064
5	0.1293	0.8642	0.1322	0.8576	0.135	0.8509	0.1377	0.8441
6	0.0743	0.9385	0.0771	0.9347	0.0799	0.9308	0.0826	0.9267
7	0.0366	0.9751	0.0385	0.9733	0.0405	0.9713	0.0425	0.9692
8	0.0158	0.9909	0.0169	0.9901	0.018	0.9893	0.0191	0.9883
9	0.0061	0.997	0.0066	0.9967	0.0071	0.9963	0.0076	0.996
10	0.0021	0.9991	0.0023	0.999	0.0025	0.9989	0.0028	0.9987
11	0.0007	0.9997	0.0007	0.9997	0.0008	0.9997	0.0009	0.9996
12	0.0002	0.9999	0.0002	0.9999	0.0002	0.9999	0.0003	0.9999

k a	3.65		3.7		3.75		3.8	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.026	0.026	0.0247	0.0247	0.0235	0.0235	0.0224	0.0224
1	0.0494	0.1209	0.0915	0.1162	0.0882	0.1117	0.085	0.1047
2	0.1731	0.294	0.1692	0.2854	0.1654	0.2771	0.1615	0.2689
3	0.2106	0.5046	0.2087	0.4942	0.2067	0.4838	0.2046	0.4735
4	0.1922	0.6969	0.1931	0.6872	0.1938	0.6775	0.1944	0.6678
5	0.1403	0.8372	0.1429	0.8301	0.1453	0.8229	0.1477	0.8156
6	0.0854	0.9225	0.0881	0.9182	0.0908	0.9137	0.0936	0.9091
7	0.0445	0.967	0.0466	0.9648	0.0487	0.9624	0.0508	0.9599
8	0.0203	0.9873	0.0215	0.9863	0.0228	0.9852	0.0241	0.984
9	0.0082	0.9956	0.0089	0.9952	0.0095	0.9947	0.0102	0.9942
10	0.003	0.9986	0.0033	0.9984	0.0036	0.9983	0.0039	0.9981
11	0.001	0.9996	0.0011	0.9995	0.0012	0.9995	0.0013	0.9994
12	0.0003	0.9999	0.0003	0.9999	0.0004	0.9999	0.0004	0.9998

k a	3.85		3.9		3.95		4	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.0213	0.0213	0.0202	0.0202	0.0193	0.0193	0.0183	0.0183
1	0.0819	0.1032	0.0789	0.0992	0.0761	0.0953	0.0733	0.0916
2	0.1577	0.2609	0.1539	0.2531	0.1502	0.2455	0.1465	0.2381
3	0.2024	0.4633	0.2001	0.4532	0.1978	0.4433	0.1954	0.4335
4	0.1984	0.6581	0.1951	0.6484	0.1953	0.6386	0.1954	0.6288
5	0.15	0.8081	0.1522	0.8006	0.1543	0.7929	0.1563	0.7851
6	0.0962	0.9044	0.0989	0.8995	0.1016	0.8945	0.1042	0.8893
7	0.0529	0.9573	0.0551	0.9546	0.0573	0.9518	0.0595	0.9489
8	0.0255	0.9828	0.0269	0.9815	0.0283	0.9801	0.0298	0.9786
9	0.0109	0.9937	0.0116	0.9931	0.0124	0.9925	0.0132	0.9919
10	0.0042	0.9979	0.0045	0.9977	0.0049	0.9974	0.0053	0.9972
11	0.0015	0.9993	0.0016	0.9993	0.0018	0.9992	0.0019	0.9991
12	0.0005	0.9998	0.0005	0.9998	0.0006	0.9998	0.0006	0.9997

k a	4.05		4.1		4.15		4.2	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.0174	0.0174	0.0166	0.0166	0.0158	0.0158	0.015	0.015
1	0.0706	0.088	0.0679	0.0845	0.0654	0.0812	0.063	0.078
2	0.1429	0.2309	0.1393	0.2238	0.1358	0.2169	0.1323	0.2102
3	0.1929	0.4238	0.1904	0.4142	0.1878	0.4047	0.1852	0.3954
4	0.1953	0.6191	0.1951	0.6093	0.1948	0.5996	0.1944	0.5898
5	0.1582	0.7773	0.16	0.7693	0.1617	0.7613	0.1633	0.7531
6	0.1068	0.8841	0.1093	0.8786	0.1118	0.8731	0.1143	0.8675
7	0.0618	0.9458	0.064	0.9427	0.0663	0.9394	0.0686	0.9361
8	0.0313	0.9771	0.0328	0.9755	0.0344	0.9738	0.036	0.9721
9	0.0141	0.9912	0.015	0.9905	0.0159	0.9897	0.0168	0.9889
10	0.0057	0.9969	0.0061	0.9966	0.0066	0.9963	0.0071	0.9959
11	0.0021	0.999	0.0023	0.9989	0.0025	0.9988	0.0027	0.9986
12	0.0007	0.9997	0.0008	0.9997	0.0009	0.9996	0.0009	0.9996
13	0.0002	0.9999	0.0002	0.9999	0.0003	0.9999	0.0003	0.9999

k a	4.25		4.3		4.35		4.4	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.0143	0.0143	0.0136	0.0136	0.0129	0.0129	0.0123	0.0123
1	0.0606	0.0749	0.0583	0.0719	0.0561	0.0691	0.054	0.0663
2	0.1288	0.2037	0.1254	0.1974	0.1221	0.1912	0.1188	0.1815
3	0.1825	0.3862	0.1798	0.3772	0.1771	0.3682	0.1743	0.3594
4	0.1939	0.5801	0.1933	0.5704	0.1926	0.5608	0.1917	0.5512
5	0.1648	0.7449	0.1662	0.7367	0.1675	0.7283	0.1687	0.7199
6	0.1167	0.8617	0.1191	0.8558	0.1215	0.8498	0.1237	0.8436
7	0.0709	0.9326	0.0732	0.929	0.0755	0.9253	0.0778	0.9214
8	0.0377	0.9702	0.0393	0.9683	0.041	0.9663	0.0428	0.9642
9	0.0178	0.988	0.0188	0.9971	0.0198	0.9861	0.0209	0.9851
10	0.0076	0.9956	0.0081	0.9952	0.0086	0.9948	0.0092	0.9943
11	0.0029	0.9985	0.0032	0.9983	0.0034	0.9982	0.0037	0.998
12	0.001	0.9995	0.0011	0.9995	0.0012	0.9994	0.0013	0.9993
13	0.0003	0.9999	0.0004	0.9998	0.0004	0.9998	0.0005	0.9998

k a	4.45		4.5		4.55		4.6	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.0117	0.0117	0.0111	0.0111	0.0106	0.0106	0.0101	0.0101
1	0.052	0.0636	0.05	0.0611	0.0481	0.0586	0.0462	0.0563
2	0.1156	0.1793	0.1125	0.1736	0.1094	0.168	0.1063	0.1626
3	0.1715	0.3508	0.1687	0.3423	0.1659	0.3339	0.1631	0.3257
4	0.1908	0.5416	0.1898	0.5321	0.1889	0.5226	0.1875	0.5132
5	0.1698	0.7114	0.1708	0.7029	0.1717	0.6944	0.1725	0.6858
6	0.126	0.8374	0.1281	0.7029	0.1302	0.8246	0.1323	0.818
7	0.0801	0.9175	0.0824	0.8311	0.0846	0.9092	0.0869	0.9049
8	0.0445	0.962	0.0463	0.9134	0.0481	0.9574	0.05	0.9549
9	0.022	0.984	0.0232	0.9597	0.0243	0.9817	0.0255	0.9805
10	0.0098	0.9938	0.0104	0.9933	0.0111	0.9928	0.0118	0.9922
11	0.004	0.9978	0.0043	0.9976	0.0046	0.9974	0.0049	0.9971
12	0.0015	0.9993	0.0016	0.9992	0.0017	0.9991	0.0019	0.999
13	0.0005	0.9998	0.0006	0.9997	0.0006	0.9997	0.0007	0.9997

k a	4.65		4.7		4.75		4.8	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.0096	0.0096	0.0091	0.0091	0.0087	0.0087	0.0082	0.0082
1	0.0445	0.054	0.0427	0.0518	0.0411	0.0497	0.0395	0.0477
2	0.1034	0.1547	0.1005	0.1523	0.0976	0.1473	0.0948	0.1425
3	0.1602	0.3176	0.1574	0.3097	0.1545	0.3019	0.1517	0.2942
4	0.1863	0.5039	0.1849	0.4946	0.1835	0.4854	0.182	0.4763
5	0.1732	0.6771	0.1738	0.6684	0.1743	0.6597	0.1747	0.651
6	0.1343	0.8114	0.1362	0.8046	0.138	0.7978	0.1398	0.7908
7	0.0892	0.9005	0.0914	0.896	0.0937	0.8914	0.0959	0.8867
8	0.0518	0.9524	0.0537	0.9497	0.0556	0.947	0.0575	0.9442
9	0.0268	0.9792	0.0281	0.9778	0.0293	0.9764	0.0307	0.9749
10	0.0125	0.9916	0.0132	0.991	0.0139	0.9903	0.0147	0.9896
11	0.0053	0.9969	0.0056	0.9966	0.006	0.9963	0.0064	0.996
12	0.002	0.9989	0.0022	0.9988	0.0024	0.9987	0.0026	0.9986
13	0.0007	0.9997	0.0008	0.9996	0.0009	0.9996	0.0009	0.9995
14	0.0002	0.9999	0.0003	0.9999	0.0003	0.9999	0.0003	0.9999

k a	4.85		4.9		4.95		5	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.0078	0.0078	0.0074	0.0074	0.0071	0.0071	0.0067	0.0067
1	0.038	0.0458	0.0365	0.0439	0.0351	0.0421	0.0337	0.0404
2	0.0921	0.1379	0.0894	0.1333	0.0868	0.1289	0.0842	0.1247
3	0.1488	0.2867	0.146	0.2793	0.1432	0.2721	0.1404	0.265
4	0.1805	0.4672	0.1789	0.4582	0.1772	0.4493	0.1755	0.4405
5	0.1751	0.6423	0.1753	0.6335	0.1754	0.6247	0.1755	0.616
6	0.1415	0.7838	0.1432	0.7767	0.1447	0.7695	0.1462	0.7622
7	0.098	0.8818	0.1002	0.8769	0.1023	0.8718	0.1044	0.8666
8	0.0594	0.9413	0.0614	0.9382	0.0633	0.9351	0.0653	0.9319
9	0.032	0.9733	0.0344	0.9717	0.0348	0.9699	0.0363	0.9682
10	0.0155	0.9888	0.0164	0.988	0.0172	0.9872	0.0181	0.9863
11	0.0068	0.9957	0.0073	0.9953	0.0087	0.9949	0.0082	0.9945
12	0.0028	0.9984	0.003	0.9983	0.0032	0.9981	0.0034	0.998
13	0.001	0.9995	0.0011	0.9994	0.0012	0.9994	0.0013	0.9993
14	0.0004	0.9998	0.0004	0.9998	0.0004	0.9998	0.0005	0.9998

k a	5.05		5.1		5.15		5.2	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.0064	0.0064	0.0061	0.0061	0.0058	0.0058	0.0055	0.0055
1	0.0324	0.0388	0.0311	0.0372	0.0299	0.0357	0.0287	0.0342
2	0.0817	0.1205	0.0793	0.1165	0.0769	0.1126	0.0746	0.1088
3	0.1367	0.2581	0.1348	0.2513	0.132	0.2446	0.1293	0.2381
4	0.1737	0.4318	0.1719	0.4231	0.17	0.4146	0.1681	0.4061
5	0.1754	0.6072	0.1753	0.5984	0.1751	0.5897	0.1748	0.5809
6	0.1476	0.7548	0.149	0.7474	0.1503	0.7399	0.1515	0.7324
7	0.1065	0.8614	0.1086	0.856	0.1106	0.8505	0.1125	0.8449
8	0.0672	0.9286	0.0692	0.9252	0.0712	0.9217	0.0731	0.9181
9	0.0377	0.9663	0.0392	0.9644	0.0407	0.9624	0.0423	0.9603
10	0.0191	0.9854	0.02	0.9844	0.021	0.9834	0.022	0.9823
11	0.0087	0.9941	0.0093	0.9937	0.0098	0.9932	0.0104	0.9927
12	0.0037	0.9978	0.0039	0.9976	0.0042	0.9974	0.0045	0.9972
13	0.0014	0.9992	0.0015	0.9992	0.0017	0.9991	0.0018	0.999
14	0.0005	0.9997	0.0006	0.9997	0.0006	0.9997	0.0007	0.9997

k a	5.25		5.3		5.35		5.4	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.0052	0.0052	0.005	0.005	0.0047	0.0047	0.0045	0.0045
1	0.0275	0.0328	0.0265	0.0314	0.0254	0.0302	0.0244	0.0289
2	0.0723	0.1051	0.0701	0.1016	0.068	0.0981	0.0659	0.0948
3	0.1266	0.2317	0.1239	0.2254	0.1212	0.2193	0.1185	0.2133
4	0.1661	0.3987	0.1641	0.3895	0.1621	0.3814	0.16	0.3733
5	0.1744	0.5722	0.174	0.5635	0.1734	0.5548	0.1728	0.5461
6	0.1526	0.7248	01537	0.7171	0.1546	0.7904	0.1555	0.7017
7	0.1145	0.8392	0.1163	0.8335	0.1182	0.8276	0.12	0.8217
8	0.0751	0.9144	0.0771	0.9106	0.079	0.9067	0.081	0.9027
9	0.0438	0.9582	0.0454	0.9559	0.047	0.9536	0.0486	0.9512
10	0.023	0.9812	0241	0.98	00251	0.9788	0.0262	0.9775
11	0.011	0.9922	0.0116	0.9916	0.0122	0.991	0.0129	0.9904
12	0.0048	0.997	0.0051	0.9967	0.0055	0.9964	0.0058	0.9962
13	0.0019	0.9989	0.0021	0.9988	0.0022	0.9987	0.0024	0.9986

k a	5.45		5.5		5.55		5.6	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.0043	0.0043	0.0041	0.0041	0.0039	0.0039	0.0037	0.0037
1	0.0234	0.0277	0.0225	0.0266	0.0216	0.0255	0.0207	0.0244
2	0.0638	0.0915	0.0618	0.0884	0.0599	0.0853	0.058	0.0824
3	0.1159	0.2074	0.1133	0.2017	0.1108	0.1961	0.1082	0.1906
4	0.1579	0.3654	0.1558	0.3575	1537	0.3498	0.1515	0.3422
5	0.1721	.65375	0.1714	0.5289	0.1706	0.5204	0.1697	0.5119
6	0.1564	0.6939	01571	0.686	0.1578	0.6782	0.1584	0.6703
7	0.1217	0.8156	0.1234	08095	0.1251	0.8033	0.1267	0.797
8	0.0829	0.8986	0.0894	0.8944	0.0868	0.8901	0.0887	0.8857
9	0.0502	0.9488	0.0519	0.9462	0.0535	0.9436	0.0552	0.9409
10	0.0274	0.9761	0285	0.9747	0.0297	0.9733	0.0309	0.9718
11	0.0136	0.9897	0.0143	0.989	0.015	0.9883	0.0157	0.9875
12	0.0062	0.9959	0.0065	0.9955	0.0069	0.9952	0.0073	0.9949
13	0.0026	0.9984	0.0028	0.9983	0.003	0.9982	0.0032	0.998
14	0.001	0.9995	0.0011	0.9994	0.0012	0.9993	0.0013	0.9993

k a	5.65		5.7		5.75		5.8	
	P(a.k)	R(a.k)	P(a.k)	R(a.k)	P(a.k)	R(a.k)	P(a.k)	R(a.k)
0	0.0035	0.0035	0.0033	0.0033	0.0032	0.0032	0.003	0.003
1	0.0199	0.0234	0.0191	0.0224	0.0183	0.0215	0.0176	0.0206
2	0.0561	0.0795	0.0544	0.0768	0.0526	0.0741	0.0509	0.0715
3	0.1057	0.1853	0.1033	0.18	0.1008	0.1749	0.0985	0.17
4	0.1494	0.3346	0.1472	0.3372	0.145	0.3199	0.1428	0.3127
5	0.1668	0.65034	0.1678	0.495	0.1667	0.4866	0.1656	0.4783
6	0.1589	0.6623	01594	06544	0.1598	0.6464	0.1601	0.6384

7	0.1283	0.7906	0.1298	0.7841	0.1312	0.7776	0.1326	0.771
8	0.0906	0.8812	0.0925	0.8766	0.0943	0.8719	0.0962	0.8672
9	0.0569	0.9381	0.0586	0.9352	0.0603	0.9322	0.062	0.9292
10	0.0321	0.9702	0.0334	0.9686	0.0347	0.9669	0.0359	0.9651
11	0.0165	0.9867	0.0173	09859	0.0181	0.985	0.019	0.9841
12	0.0078	0.9945	0.0082	0.9941	0.0087	0.9937	0.0092	0.9932
13	0.0034	0.9979	0.0036	0.9977	00038	0.9975	0.0041	0.9973
14	0.0014	0.9992	0.0015	0.9991	0.0016	0.9991	0.0017	0.999

k a	5.85		5.9		5.95		6	
	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)	P(a,k)	R(a,k)
0	0.0029	0.0029	0.0027	0.0027	0.0026	0.0026	0.0025	0.0025
1	0.0168	0.0197	0.0162	0.0189	0.0155	0.0181	0.0149	0.0174
2	0.0493	0.069	0.0477	0.0666	0.0461	0.0624	0.0446	0.062
3	0.0961	0.1651	0.0938	0.1604	0.0915	0.1557	0.0892	0.1512
4	0.1405	0.3056	0.1383	0.2987	0.1361	0.2918	0.1339	0.2851
5	0.1644	0.4701	0.1632	0.4619	0.1619	0.4537	0.1606	0.4457
6	0.1603	0.6304	011605	0.6224	0.1606	0.6143	0.1606	0.6063
7	0.134	0.7644	0.1535	0.7576	0.1365	0.7508	0.1377	0.744
8	0.098	0.8623	0.0998	0.8574	0.1015	0.8524	0.1033	0.8472
9	0.0673	0.926	0.0654	0.9228	0.0671	0.9195	0.0688	0.9161
10	0.0373	0.9633	0.3086	0.9614	0.0399	0.9594	0.0413	0.9574
11	0.0198	0.9831	0.0207	0.9821	0.0216	0.981	0.0225	0.9799
12	0.0097	0.9927	0.0102	0.9929	0.0107	0.9917	0.0113	0.9912
13	0.0043	0.9971	0.0046	0.9969	0.0049	0.9966	0.0052	0.9964
14	0.0018	0.9989	0.0019	0.9988	0.0021	0.9987	0.0022	0.9986

Bảng giá trị hàm phân phối chuẩn N(0,1);F(x) = P(U < x)

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
0.000	0.5000	0.160	0.5636	0.320	0.6255	0.480	0.6844
0.005	0.5020	0.165	0.5655	0.325	0.6274	0.485	0.6862
0.010	0.5040	0.170	0.5675	0.330	0.6293	0.490	0.6879
0.015	0.5060	0.175	0.5695	0.335	0.6312	0.495	0.6897
0.020	0.5080	0.180	0.5714	0.340	0.6331	0.500	0.6915
0.025	0.5100	0.185	0.5734	0.345	0.6350	0.505	0.6932
0.030	0.5120	0.190	0.5753	0.350	0.6368	0.510	0.6950
0.035	0.5140	0.195	0.5773	0.355	0.6387	0.515	0.6967
0.040	0.5160	0.200	0.5793	0.360	0.6406	0.520	0.6985
0.045	0.5179	0.205	0.5812	0.365	0.6424	0.525	0.7002
0.050	0.5199	0.210	0.5832	0.370	0.6443	0.530	0.7019
0.055	0.5219	0.215	0.5851	0.375	0.6462	0.535	0.7037
0.060	0.5239	0.220	0.5871	0.380	0.6480	0.540	0.7054
0.065	0.5259	0.225	0.2890	0.385	0.6499	0.545	0.7071
0.070	0.5279	0.230	0.5910	0.390	0.6517	0.550	0.7088
0.075	0.5299	0.235	0.5929	0.395	0.6536	0.555	0.7106
0.080	0.5319	0.240	0.5948	0.400	0.6554	0.560	0.7123
0.085	0.5339	0.245	0.5968	0.405	0.6573	0.565	0.7140
0.090	0.5359	0.250	0.5987	0.410	0.6591	0.570	0.7157
0.095	0.5378	0.255	0.6006	0.415	0.6609	0.575	0.7174
0.100	0.5398	0.260	0.6026	0.420	0.6628	0.580	0.7190
0.105	0.5418	0.265	0.6045	0.425	0.6646	0.585	0.7207
0.110	0.5438	0.270	0.6064	0.430	0.6664	0.590	0.7224
0.115	0.5458	0.275	0.6083	0.435	0.6682	0.595	0.7241
0.120	0.5478	0.280	0.6103	0.440	0.6700	0.600	0.7257
0.125	0.5497	0.285	0.6122	0.445	0.6718	0.605	0.7274
0.130	0.5417	0.290	0.141	0.450	0.6736	0.610	0.7291
0.135	0.5437	0.295	0.6160	0.455	0.6754	0.615	0.7307
0.140	0.5557	0.300	0.6179	0.460	0.6772	0.620	0.7324
0.145	0.5576	0.305	0.6198	0.465	0.6790	0.625	0.7340
0.150	0.5596	0.310	0.6217	0.470	0.6808	0.630	0.7357
0.155	0.5616	0.315	0.6236	0.475	0.6826	0.635	0.737?

Bảng giá trị hàm phân phối chuẩn N(0,1); F(x) = P(U < x)

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
0.640	0.7389	0.800	0.7881	0.960	0.8315	1.120	0.8686
0.645	0.7405	0.805	0.7896	0.965	0.8327	1.125	0.8697
0.650	0.7422	0.810	0.7910	0.970	0.8340	1.130	0.8708
0.655	0.7438	0.815	0.7925	0.975	0.8352	1.135	0.8718
0.660	0.7454	0.820	0.7939	0.980	0.8365	1.140	0.8729
0.665	0.7470	0.825	0.7953	0.985	0.8377	1.145	0.8739
0.670	0.7486	0.830	0.7967	0.990	0.8389	1.150	0.8749
0.675	0.7502	0.835	0.7981	0.995	0.8401	1.155	0.8760
0.680	0.7517	0.840	0.7995	1.000	0.8413	1.160	0.8770
0.685	0.7533	0.845	0.8009	1.005	0.8426	1.165	0.8780
0.690	0.7549	0.850	0.8023	1.010	0.8438	1.170	0.8790
0.695	0.7565	0.855	0.8037	1.015	0.8449	1.175	0.8800
0.700	0.7580	0.860	0.8051	1.020	0.8461	1.180	0.8810
0.705	0.7596	0.865	0.8065	1.025	0.8473	1.185	0.8820
0.710	0.7611	0.870	0.8078	1.030	0.8485	1.190	0.8830
0.715	0.7627	0.875	0.8092	1.035	0.8497	1.195	0.8840
0.720	0.7642	0.880	0.8160	1.040	0.8508	1.200	0.8849
0.725	0.7658	0.885	0.8119	1.045	0.8520	1.205	0.8859
0.730	0.7673	0.890	0.8133	1.050	0.8531	1.210	0.8869
0.735	0.7688	0.895	0.8164	1.055	0.8543	1.215	0.8878
0.740	0.7704	0.900	0.8159	1.060	0.8554	1.220	0.8888
0.745	0.7719	0.905	0.8173	1.065	0.8566	1.225	0.8897
0.750	0.7734	0.910	0.8186	1.070	0.8577	1.230	0.8907
0.755	0.7749	0.915	0.8199	1.075	0.8588	1.235	0.8916
0.760	0.7464	0.920	0.8212	1.080	0.8599	1.240	0.8925
0.765	0.7779	0.925	0.8225	1.085	0.8610	1.245	0.8934
0.770	0.7794	0.930	0.8238	1.090	0.8621	1.250	0.8944
0.775	0.7808	0.935	0.8251	1.095	0.8623	1.255	0.8953
0.780	0.7823	0.940	0.8264	1.100	0.8643	1.260	0.8962
0.785	0.7838	0.945	0.8277	1.105	0.8654	1.265	0.8971
0.790	0.7852	0.950	0.8289	1.110	0.8665	1.270	0.8980
0.795	0.7867	0.955	0.8302	1.115	0.8676	1.275	0.8988

Bảng giá trị hàm phân phối chuẩn N(0,1); F(x) = P(U < x)

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
1.280	0.8997	1.440	0.9251	1.600	0.9425	1.760	0.9608
1.285	0.9006	1.445	0.9258	1.605	0.9458	1.765	0.9612
1.290	0.9015	1.450	0.9265	1.610	0.9463	1.770	0.9616
1.295	0.9023	1.455	0.9272	1.615	0.9468	1.775	0.9621
1.300	0.9023	1.460	0.9279	1.620	0.9474	1.780	0.9625
1.305	0.9041	1.465	0.9285	1.625	0.9479	1.785	0.9629
1.310	0.9049	1.470	0.9292	1.630	0.9484	1.790	0.9633
1.315	0.9057	1.475	0.9299	1.635	0.9490	1.795	0.9637
1.320	0.9066	1.480	0.9306	1.640	0.9495	1.800	0.9641
1.325	0.9074	1.485	0.9312	1.645	0.9500	1.805	0.9645
1.335	0.9082	1.490	0.9319	1.650	0.9505	1.810	0.9649
1.340	0.9091	1.495	0.9325	1.655	0.9510	1.815	0.9652
1.345	0.9099	1.500	0.9332	1.660	0.9515	1.820	0.9656
1.350	0.9107	1.505	0.9338	1.665	0.9520	1.825	0.9660
1.355	0.9115	1.510	0.9345	1.670	0.9525	1.830	0.9664
1.360	0.9123	1.515	0.9351	1.675	0.9530	1.835	0.9667
1.365	0.9131	1.520	0.9357	1.680	0.9535	1.840	0.9671
1.370	0.9139	1.525	0.9364	1.685	0.9540	1.845	0.9675
1.375	0.9174	1.530	0.9370	1.690	0.9545	1.850	0.9678
1.380	0.9154	1.535	0.9376	1.695	0.9550	1.855	0.9682
1.385	0.9162	1.540	0.9382	1.700	0.9554	1.860	0.9686
1.390	0.9170	1.545	0.9388	1.705	0.9559	1.865	0.9689
1.395	0.9177	1.550	0.9394	1.710	0.9564	1.870	0.9693
1.400	0.9185	1.555	0.9400	1.715	0.9573	1.875	0.9696
1.405	0.9192	1.560	0.9406	1.720	0.9577	1.880	0.9699
1.410	0.9200	1.565	0.9412	1.725	0.9577	1.885	0.9703
1.415	0.9207	1.570	0.9418	1.730	0.9582	1.890	0.9706
1.450	0.9215	1.575	0.9424	1.735	0.9586	1.895	0.9710
1.120	0.9222	1.580	0.9429	1.740	0.9591	1.900	0.9713
1.425	0.9229	1.585	0.9435	1.745	0.9595	1.905	0.9716
1.430	0.9236	1.590	0.9441	1.750	0.9599	1.910	0.9719
1.435	0.9244	1.595	0.9446	1.755	0.9604	1.915	0.9723

Bảng giá trị hàm phân phối chuẩn N(0,1);F(x) = P(U < x)

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
1.920	0.9726	2.080	0.9812	2.240	0.9875	2.400	0.9918
1.925	0.9729	2.085	0.9815	2.245	0.9876	2.405	0.9919
1.930	0.9732	2.090	0.9817	2.250	0.9878	2.410	0.9920
1.935	0.9735	2.095	0.9819	2.255	0.9879	2.415	0.9921
1.940	0.9738	2.100	0.9821	2.260	0.9879	2.420	0.9922
1.945	0.9741	2.105	0.9824	2.265	0.9881	2.425	0.9923
1.950	0.9744	2.110	0.9826	2.270	0.9882	2.430	0.9925
1.955	0.9747	2.115	0.9828	2.275	0.9884	2.435	0.9925
1.960	0.9750	2.120	0.9830	2.280	0.9885	2.440	0.9927
1.965	0.9753	2.125	0.9832	2.285	0.9887	2.445	0.9928
1.970	0.9756	2.130	0.9834	2.290	0.9888	2.450	0.9929
1.975	0.9759	2.135	0.9836	2.295	0.9890	2.455	0.9930
1.980	0.9761	2.140	0.9838	2.300	0.891	2.460	0.9931
1.985	0.9764	2.145	0.9840	2.305	0.9893	2.465	0.9931
1.990	0.9767	2.150	0.9842	2.310	0.9894	2.470	0.9932
1.995	0.9770	2.155	0.9844	2.315	0.9896	2.475	0.9933
1.200	0.9772	2.160	0.9846	2.320	0.9897	2.480	0.9934
2.005	0.9775	2.165	0.9848	2.325	0.9898	2.485	0.9935
2.010	0.9778	2.170	0.9850	2.330	0.9900	2.490	0.9936
2.015	0.9780	2.175	0.9852	2.335	0.9901	2.495	0.9937
2.020	0.9783	2.180	0.9854	2.340	0.9902	2.500	0.9938
2.025	0.9786	2.185	0.9856	2.345	0.9904	2.505	0.9939
2.030	0.9788	2.190	0.9857	2.350	0.9905	2.510	0.9940
2.035	0.9791	2.195	0.9859	2.355	0.9906	2.515	0.9940
2.040	0.9793	2.200	0.9861	2.360	0.9907	2.520	0.9941
2.045	0.9796	2.205	0.9863	2.365	0.9909	2.525	0.9942
2.050	0.998	2.210	0.9864	2.370	0.9910	2.530	0.9943
2.055	0.9801	2.215	0.9866	2.375	0.9911	2.535	0.9944
2.060	0.9803	2.220	0.9868	2.380	0.9913	2.540	0.9945
2.065	0.9805	2.225	0.9870	2.385	0.9915	2.545	0.9945
2.070	0.9808	2.230	0.9871	2.390	0.9916	2.550	0.9946
2.075	0.9810	2.235	0.9873	2.395	0.9917	2.555	0.9947

Bảng giá trị hàm phân phối chuẩn N(0,1);F(x) = P(U < x)

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
2.560	0.9948	2.720	0.9967	2.880	0.9980	3.040	**0.9988**
2.565	0.9948	2.725	0.9968	2.885	0.9980	3.045	**0.9988**
2.570	0.9949	2.730	0.9969	2.890	0.9981	3.050	**0.9989**
2.575	0.9950	2.735	0.9969	2.895	0.9981	3.055	**0.9989**
2.580	0.9951	2.740	0.9970	2.900	09981	3.060	**0.9989**
2.585	0.9951	2.745	0.9970	2.905	0.9982	3.065	**0.9989**
2.590	0.9952	2.750	0.9971	1.910	0.9982	3.070	**0.9989**
2.595	0.9953	2.755	0.9971	2.915	0.9982	3.075	**0.9989**
2.600	0.9953	2.760	0.9972	2.920	0.9982	3.080	**0.9990**
2.605	0.9954	2.765	0.9972	2.925	0.9983	3.080	**0.9990**
2.610	0.9955	2.770	0.9972	2.930	0.9983	3.085	**0.9990**
2.615	0.9955	2.775	0.9972	2.935	0.9983	3.090	**0.9990**
2.620	0.9956	2.780	0.9973	2.940	0.9984	3.095	**0.9990**
2.625	0.9957	2.785	0.9973	2.945	0.9984	3.100	**0.9990**
2.630	0.9957	2.790	0.9974	2.950	0.9984	310.5	**0.9991**
2.635	0.9958	2.795	0.9974	2.955	0.9984	3.110	**0.9991**
2.640	0.9959	2.800	0.9974	2.960	0.9985	3.115	**0.9991**
2.645	0.9959	2.805	009975	2.965	0.9985	3.120	**0.9991**
2.650	0.9960	2.810	0.9975	2.970	0.9985	3.125	**0.9991**
2.655	0.9960	2.815	0.9976	2.975	0.9985	3.130	**0.9991**
2.660	0.9961	2.820	0.9976	2.980	0.9986	3.135	**0.9992**
2.665	0.9962	2.825	0.9976	2.985	0.9986	3.140	**0.9992**
2.670	0.9962	2.830	0.9977	2.990	0.9986	3.145	**0.9992**
2.675	0.9963	2.835	0.9977	2.995	0.9986	3.150	**0.9992**
2.680	0.9963	2.840	0.9977	3.000	0.9987	3.155	**0.9992**
2.685	0.9964	2.845	0.9978	3.005	0.9987	3.165	**0.9992**
2.690	0.9964	2.850	0.9978	3.010	0.9987	3.170	**0.9992**
2.695	0.9965	2.855	0.9978	3.015	0.9987	3.175	**0.9993**
2.700	0.9965	2.860	0.9979	0.020	0.9987	3.180	**0.9993**
2.705	0.9966	2.865	0.9979	3.025	0.9988	3.185	**0.9993**
2.710	0.9966	2.870	0.9979	3.030	0.9988	3.190	**0.9993**
2.715	0.9967	2.875	0.9980	3.035	0.9988	3.195	0.9993

MỤC LỤC

	Trang
Lời nói đầu	3
***Chương I:* Giới thiệu mô hình toán kinh tế**	5
I. Ý nghĩa và khái niệm của mô hình toán kinh tế trong nghhiên cứu, phân tích kinh tế	5
II. Cấu trúc mô hình toán kinh tế	11
III. Phân loại mô hình toán kinh tế	15
IV. Nội dung của phương pháp mô hình trong nghiên cứu và phân tích kinh tế	17
V. Phương pháp phân tích mô hình -phân tích so sánh tĩnh	20
VI. Áp dụng phân tích mô hình đối với một số mô hình kinh tế phổ biến	30
Bài tập chương I	75
***Chương II:* Bảng vào - ra (Input - Output tables - I/O)**	87
I. Sơ lược về lịch sử phát triển và việc ứng dụng bảng vào - ra Việt Nam	87
II. Một số vấn đề về phương pháp luận xây dựng bảng vào - ra	92
III. Bảng vào - ra của một số nước	99
IV. Bảng vào - ra dạng hiện vật	103
V. Ba dạng vào - ra dạng giá trị	107
VI. Hệ số chi phí toàn bộ	116

VII. Một số ứng dụng của bảng I/O trong phân tích và dự báo kinh tế 120
Bài tập chương II 132
***Chương III:* Mô hình tối ưu tuyến tính - Quy hoạch tuyến tính** 147
I. Một số tình huống trong hoạt động kinh tế và mô hình bài toán QHTT tương ứng 147
II. Mô hình bài toán quy hoạch tuyến tính 152
III. Các tính chất chung của bài toán quy hoạch tuyến tính 165
IV. Phương pháp đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính 167
V. Phân tích quan hệ trong cặp bài toán đối ngẫu và ứng dụng 187
VI. Bài toán vận tải 206
Bài tập chương III 223
***Chương IV:* Mô hình hệ thống phục vụ công cộng** 239
I. Bài toán lý thuyết phục vụ công cộng 240
II. Mô hình hoá hệ thống phục vụ công cộng 242
III. Mộ số hệ thống phục vụ công cộng 254
Bài tập chương IV 282
***Chương V:* Mô hình quản lý dự trữ** 289
I. Bài toán điều kiện dự trữ và các khái niệm 289
II. Một số mô hình dự trữ tất định 292
III. Một số mô hình với các yếu tố ngẫu nhiên 335
Bài tập chương V 345
Tài liệu tham khảo 359

BAN BIÊN TẬP – NXB THỐNG KÊ
98 Thụy Khuê - Tây Hồ - Hà Nội
ĐT: 04.8471397, Fax: 04.8457814

Chịu trách nhiệm xuất bản
CÁT VĂN THÀNH

Biên tập: DƯ VINH – NGUYỄN VÂN ANH
Trình bày: LÊ ANH TUẤN
Chế bản: MAI ANH
Sửa bản in: BAN BIÊN TẬP

Sách do Ban Biên tập - NXB Thống kê chế bản và triển khai in.

GIÁO TRÌNH MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

In 2520 cuốn, khổ 14,5 x 20,5cm tại C.ty In và Văn hoá phẩm.
Số đăng ký kế hoạch xuất bản: 18-2006/CXB/443-59/TK.
In xong, nộp lưu chiểu: tháng 1 năm 2006